Breve Revisão de Cálculo Vetorial

1. Operações com vetores

Dados os vetores A = A_x**i** + A_y**j** + A_z**k e B** = B_x**i** + B_y**j** + B_z**k, define-se:**

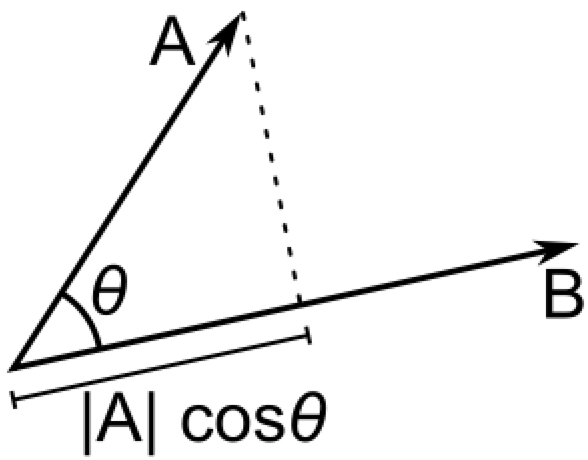
Produto escalar entre os vetores A e B

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB\cos\theta$$

Daí,

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$

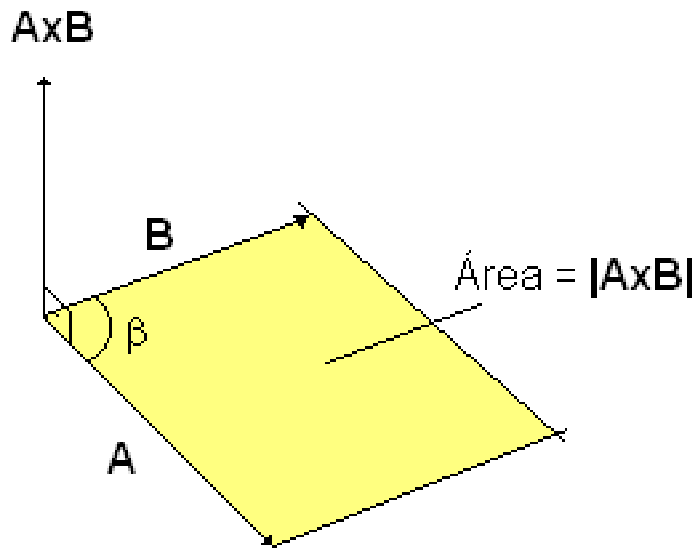


Produto vetorial do vetores A e B

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\mathbf{i}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\mathbf{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\mathbf{k}$$

$$\left|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right|=AB\,\mathrm{sen}\,\theta$$



2. Uma definição física para Campo

Dada uma região *D* no espaço tridimensional e uma grandeza física (escalar ou vetorial), então, essa região será chamada de campo se, nela, o valor da grandeza num dado ponto depender univocamente das coordenadas desse ponto.

Se a grandeza for escalar (pressão, temperatura, etc.), o campo é dito escalar.

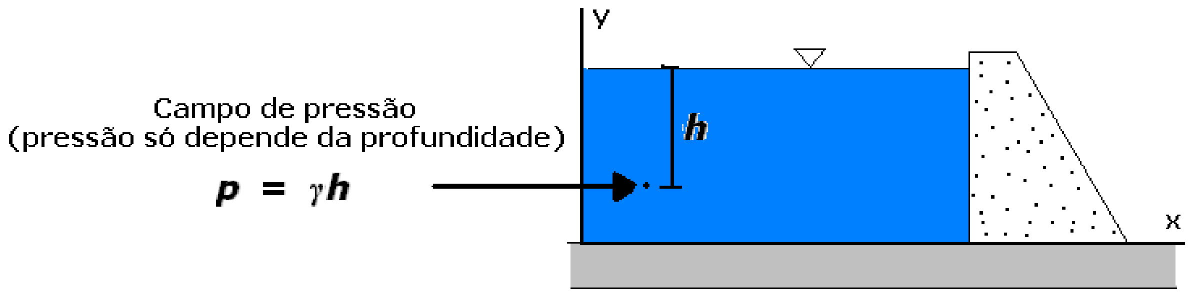
Se a grandeza for vetorial (força, velocidade, etc), o campo é dito vetorial.

O valor da grandeza também pode depender do tempo. Nesse caso, o campo é dito variável (ou dinâmico). Caso contrário, ele é dito estacionário.

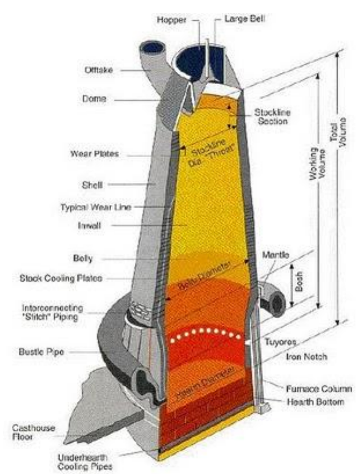
Exemplos de campos escalares:

Em um campo escalar, um número é definido para cada ponto do espaço.

→ Campo de pressão em uma represa, $p = \gamma h$.



→ Campos de Temperatura.



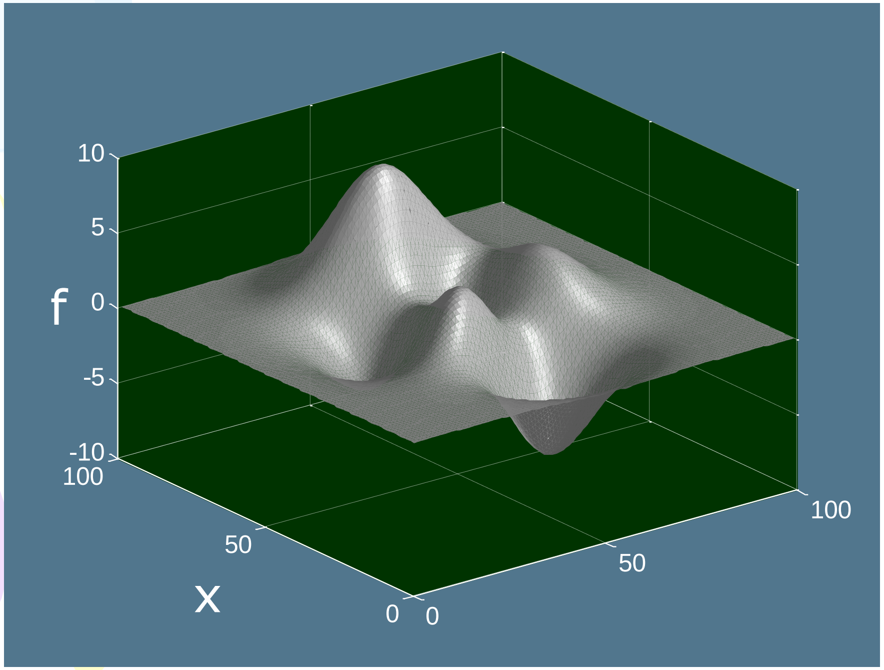
→ **Um valor escalar é definido para cada ponto do espaço (analítico ou numérico).**

$$S(x, y) = f(x, y)$$

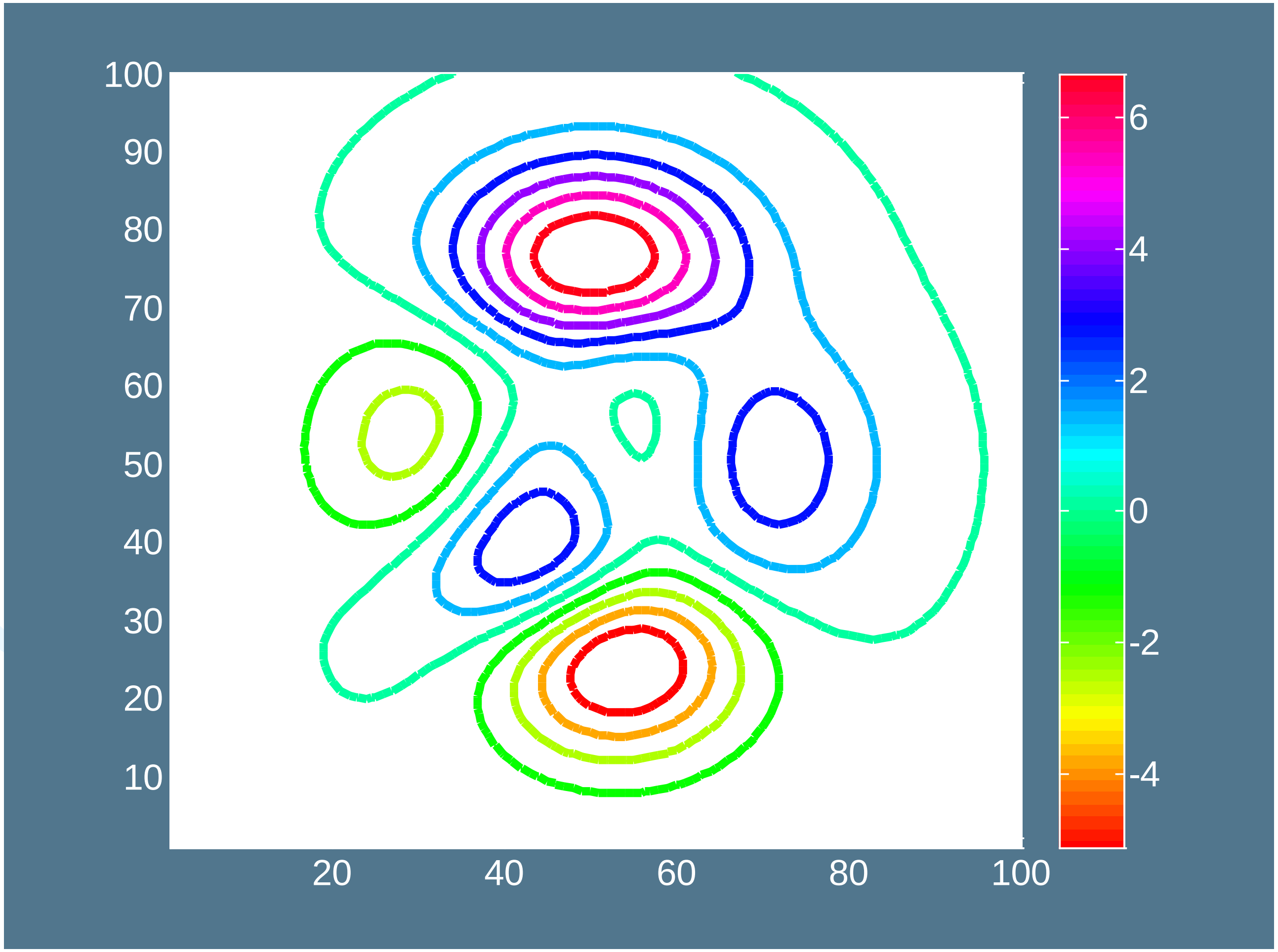
$$S(x, y) = x\sin(xy)$$

3	4	8	9	5	0	5	4	3	8
4	5	6	8	5	4	6	8	56	4
6	4	67	5	7	5	7	9	0	6
35	3	56	78	9	0	7	6	4	34
3	5	5	76	89	0	8	76	65	5
4	66	87	9	0	9	87	6	5	4
3	83	3	34	54	5	5	56	55	5
36	8	98	9	9	76	5	54	4	56
28	39	8	7	6	5	54	4	34	3
445	56	7	8	9	00	6	87	65	54

Representação gráfica

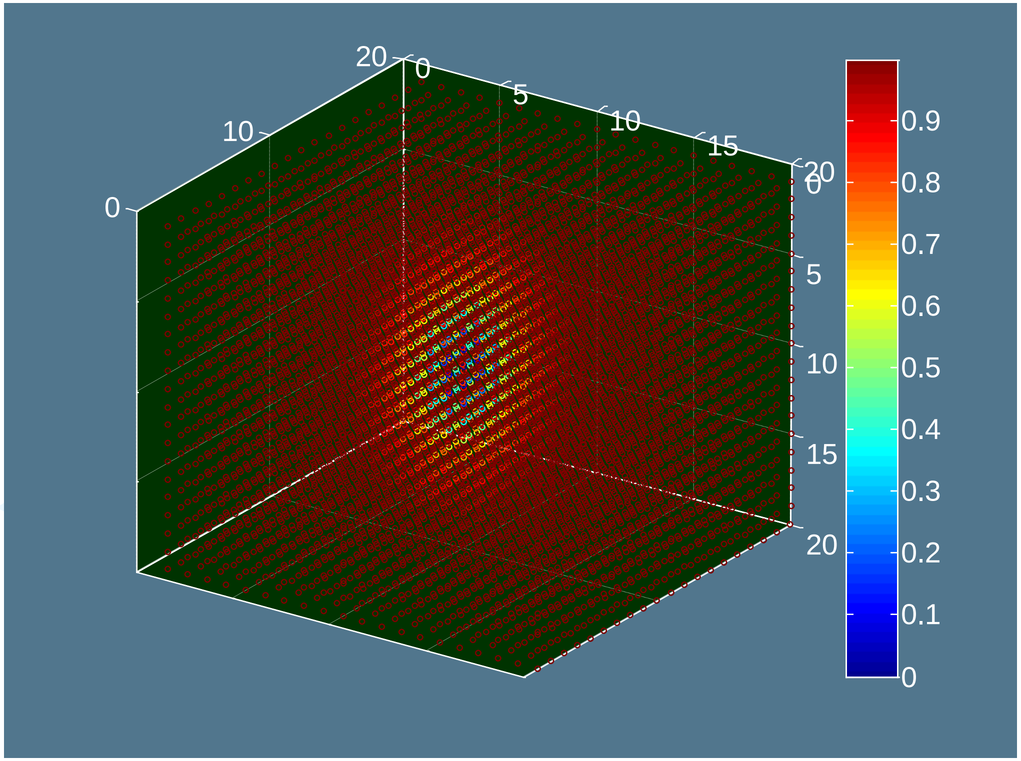


→ Linhas de iso-contorno (temperatura (ºC), altitude, etc.)



→ Campos escalares em 3-D

$$S(x,y,z) = 1 - e^{-(x-10)^2/3} e^{-(y-10)^2/2} e^{-(z-10)^2/5}$$



Campos Vetoriais

Em um campo vetorial, um vetor é definido para cada ponto do espaço. Formalmente, temos:

→ Um campo Vetorial é definido, no $\Re^2$, como uma função F que associa a cada ponto *M*(x, y) em um subconjunto *D* do $\Re^2$, um único vetor F(*M*) bidimensional, tal que,

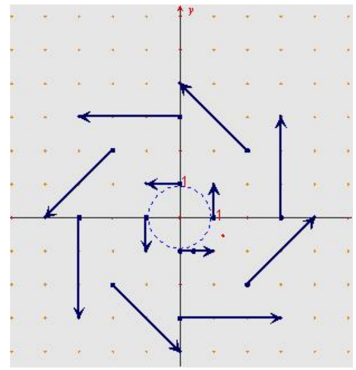
$$\mathbf{F}(M) = \mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$$

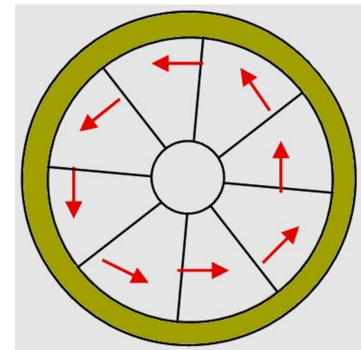
→ Um campo Vetorial é definido, no $\Re^3$, como uma função F que associa a cada ponto *N*(x, y, z) em um subconjunto *E* do $\Re^3$, um único vetor F(*N*) tridimensional, tal que,

$$\mathbf{F}(N) = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

→ Campo de velocidade em uma roda ou turbina,

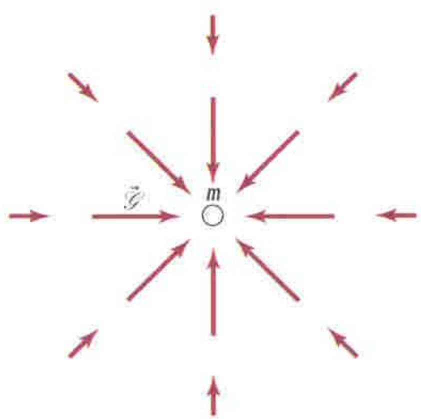
$$\mathbf{F} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$$

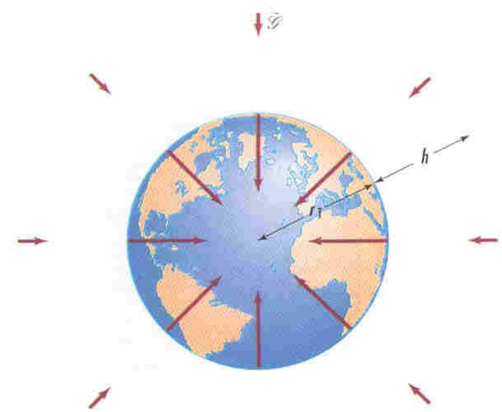




→ Campo gravitacional (campo do quadrado inverso),

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$





Exemplo - Exercício

Faça um diagrama do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{y}\,\mathbf{i}$

$$Considerando:\ y = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\ e\ 5.\ Temos:$$

$$\mathbf{F}(x,0) = 0$$

$$\mathbf{F}(x,1/2) = (\sqrt{2}/2)\,\mathbf{i}$$

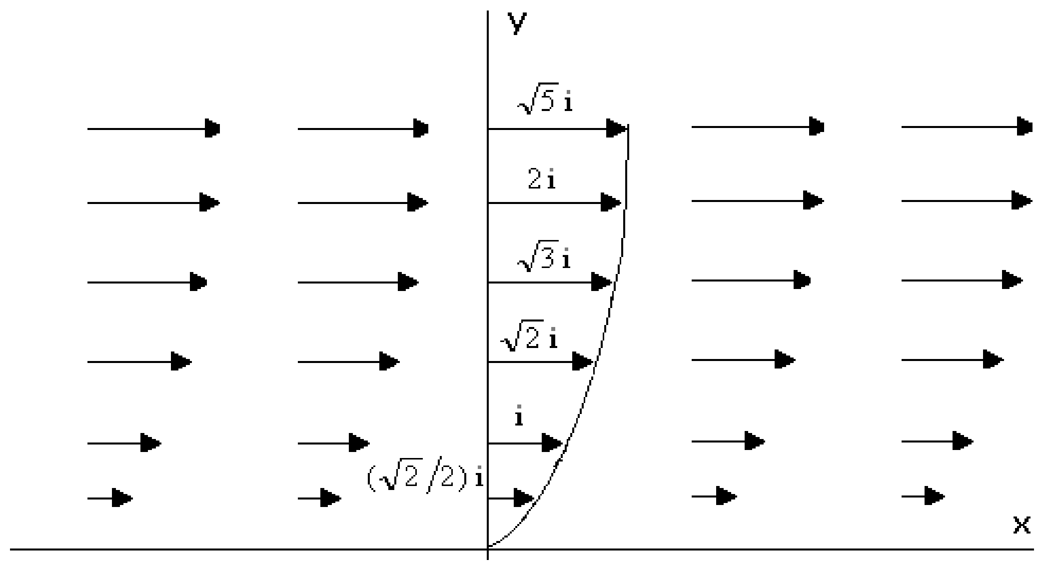
$$\mathbf{F}(x,1) = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}(x,2) = \sqrt{2}\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}(x,3) = \sqrt{3}\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}(x,4) = 2\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}(x,5) = \sqrt{5}\,\mathbf{i}$$



Este campo vetorial descreve a velocidade da corrente num córrego ou rio em várias profundidades. Velocidade é nula no leito.

Exemplo de uma representação numérica de um campo vetorial.

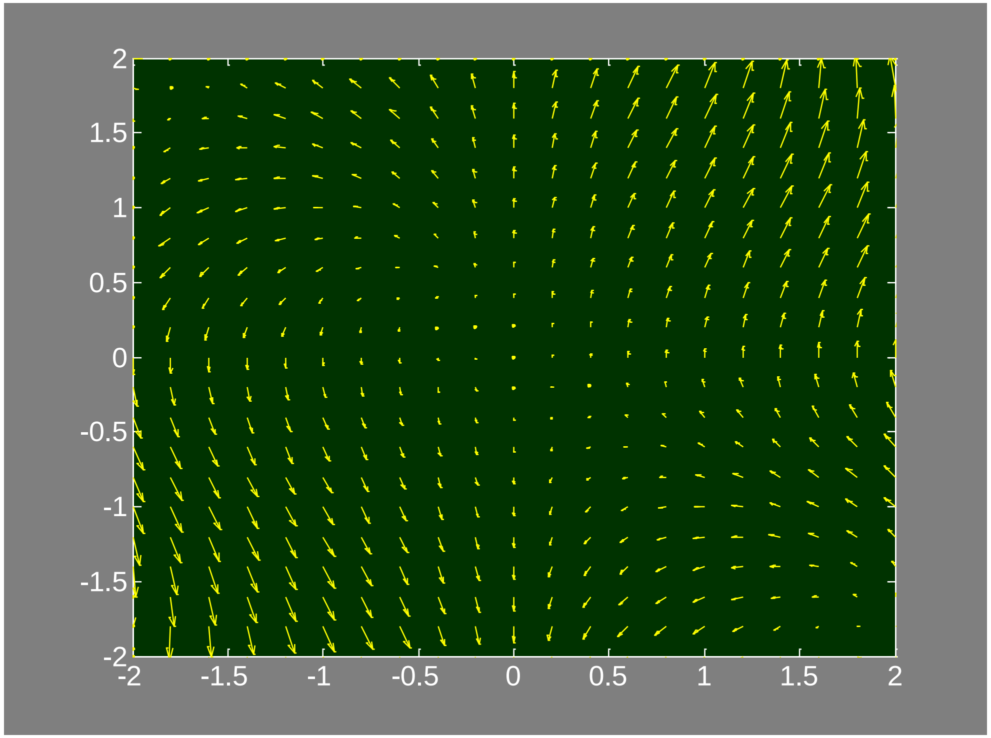
$$\begin{matrix} 2 & 6 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{matrix}\;\hat{i} + \begin{matrix} 2 & 6 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{matrix}\;\hat{j} + \begin{matrix} 2 & 6 & 5 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{matrix}\;\hat{k}$$

Exemplos de imagens de campos vetoriais

$$\vec{\mathbf{V}}(x,y)=\sin(xy)\hat{i}+\left(x+y\right)\hat{j}$$

Há um vetor definido para cada ponto do Espaço 2-D.

O tamanho das flechas representa a magnitude do vetor.

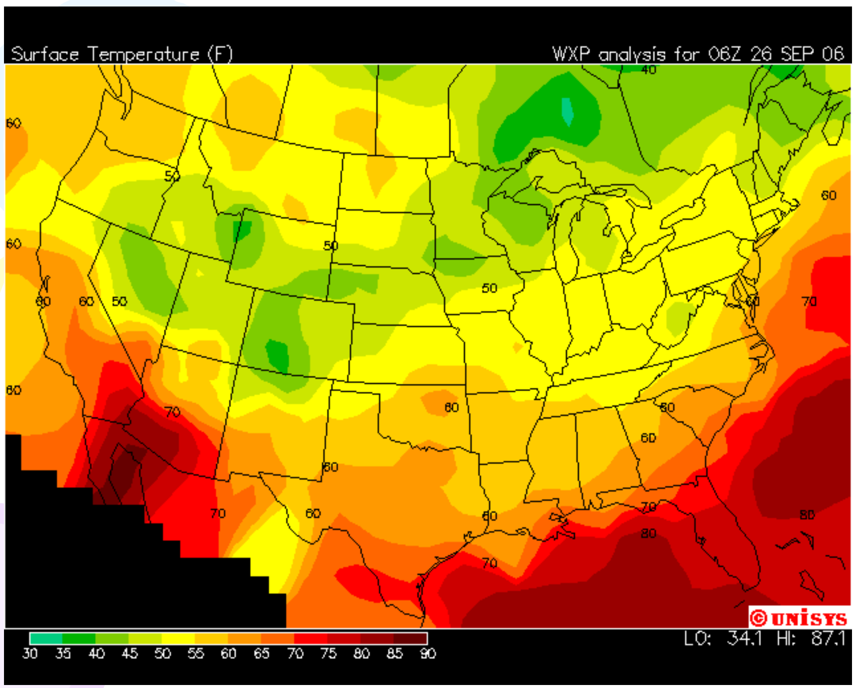


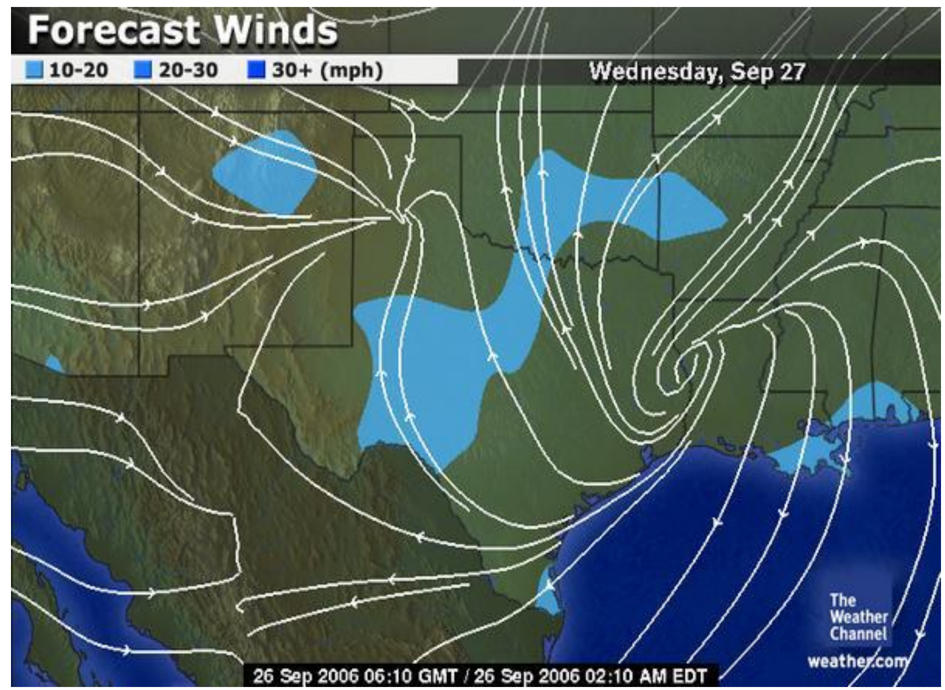
Universidade Federal do ABC

Exemplos de campos escalares e vetoriais

→ **Campo escalar**
Mapa de temperatura

→ **Campo vetorial**
Velocidade dos ventos





4. Operador Nabla

“Nabla” (harpa em grego)

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Aplicado sobre uma campo escalar, *f,* define um campo vetorial chamado de Gradiente de *f,* ∇*f.*

O produto escalar com um campo vetorial, F, define um campo escalar chamado de Divergente de F, ∇•F.

Produto vetorial com um campo vetorial, F, define um novo campo vetorial chamado de Rotacional de F, ∇ F.

5. Campos Gradientes

- **Se *f* = *f(x,y)* é uma função escalar de duas variáveis, então, seu gradiente é definido por,**

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \quad ou \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

- **Se *f* = *f(x,y,z)* é uma função escalar de três variáveis, então, seu gradiente é definido por,**

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \quad ou \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

- **Onde** $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ **é o vetor Nabla.**

Exercícios

1) Encontre os campos gradientes das funções abaixo e trace seus diagramas de campo.

a) $f(x,y) = x^2 y^2$

(Resolução a seguir)

b) $f(x,y) = x + y$

c) $f(x,y) = \ln(x+2y)$

(Resolução no quadro)

Resolução

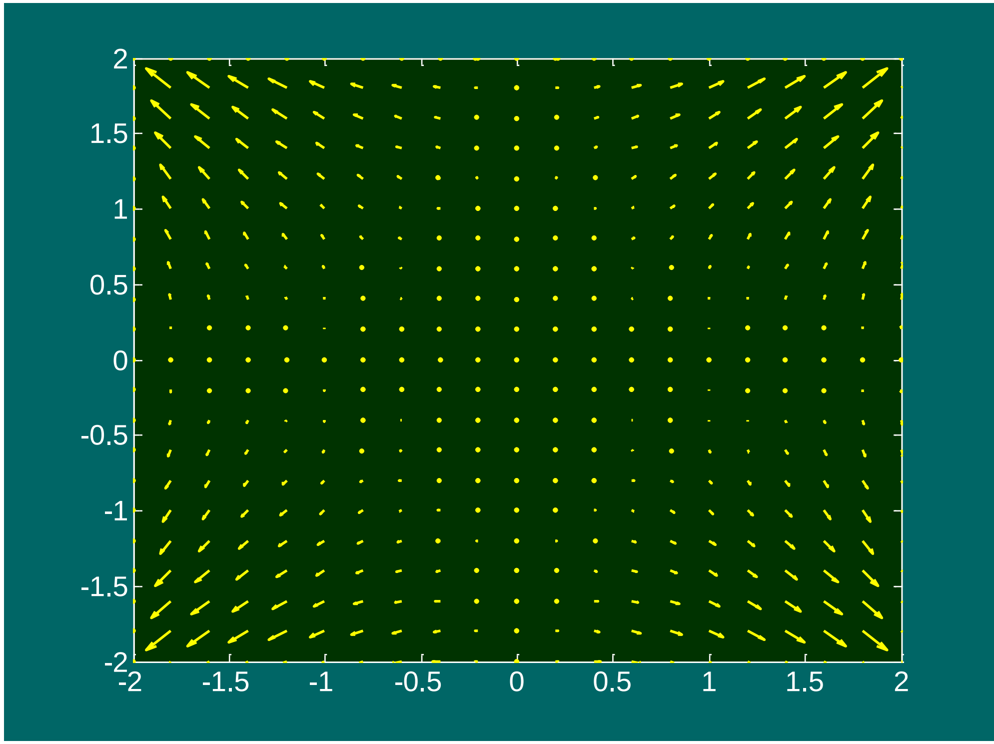
$$f(x,y) = x^2 y^2$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2xy^2\,\mathbf{i} + 2x^2y\,\mathbf{j}$$

Interpretação

O Gradiente é um campo vetorial cujas componentes são as derivadas do campo escalar.

Em qualquer ponto, o Gra-Diente "aponta" na direção de máxima inclinação, e sua magnitude é a inclinação.

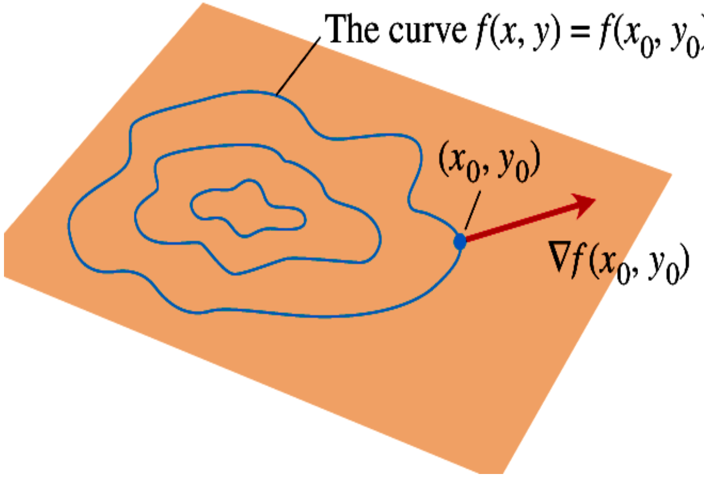


Em outras palavras,

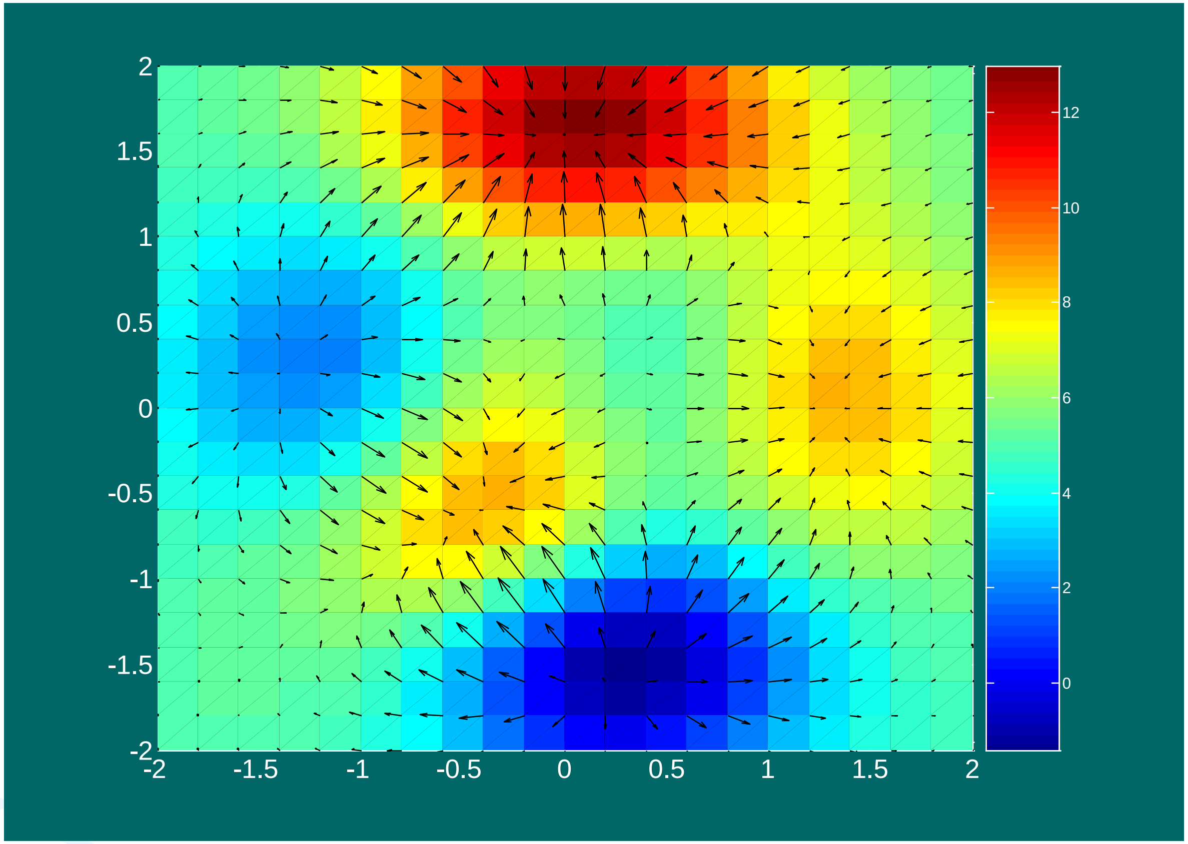
O gradiente de uma função escalar, calculado num dado ponto, é um vetor cujo módulo representa a máxima taxa de variação de crescimento dessa função naquele ponto.

Isto significa que o vetor gradiente calculado em (x_0, y_0, z_0) tem a direção para a qual ocorre o máximo crescimento da função em (x_0, y_0, z_0).

Além disso ele é perpendicular à superfície no ponto (x_0, y_0), no $\Re^2$, ou (x_0, y_0, z_0) no $\Re^3$.



Visualização,



→ **Mapa de cores: função – campo escalar**

→ **Representação de setas: campo vetorial obtido a partir do gradiente da função escalar.**

6. Campos conservativos e funções potenciais

▶ **Se F é um campo vetorial em duas ou três dimensões. Então, diz-se que F é um campo conservativo numa região do $\Re^2$ ou $\Re^3$, se F for o campo gradiente de alguma função *f* naquela região. Isto é, F = ∇*f*. *A* função *f* é chamada de função potencial.**

Exemplo

Considere o campo vetorial do quadrado inverso em duas dimensões.

$$\mathbf{F}(x,y)=\frac{c}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j})$$

Mostre que F é um campo conservativo em qualquer região do $\Re^2$ que não contenha a origem e cuja função potencial seja

$$f(x,y)=-\frac{c}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

Resolução

Temos que mostrar que o campo gradiente de *f,* em qualquer região que não contenha a origem, é F. Para isso, calcularemos ∇*f*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{cx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{cy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Daí,

$$\nabla f = \frac{cx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathbf{j} = \frac{c}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) = \mathbf{F}(x,y)$$

Logo, F é conservativo em qualquer região do $\Re^2$, exceto na origem, já que F = ∇*f*. *f* é, portanto, função potencial de F.

7. Divergência e Rotacional

Seja F(x,y) = *f*(x,y)i + *g*(x,y)j um campo vetorial em duas dimensões, define-se a divergência de F, denotado por divF ou ∇•F, ao escalar

$$div\mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$$

ou simplesmente,

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Em três dimensões, F(x,y) = *f*(x,y,z)i + *g*(x,y,z)j + *h*(x,y,z)k

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Seja F(x,y) = *f*(x,y)i + *g*(x,y)j um campo vetorial em duas dimensões, define-se o rotacional de F, denotado por *rot*F ou ∇xF, ao campo vetorial

$$rot\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

Em três dimensões, F(x,y) = *f*(x,y,z)i + *g*(x,y,z)j + *h*(x,y,z)k

$$rot\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

Universidade Federal do ABC

Os resultados anteriores podem ser reescritos como:

→ **Em duas dimensões,**

$$rot\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ f & g & 0 \end{vmatrix}$$

→ **Em três dimensões,**

$$rot\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

O divF tem valores escalares, enquanto *rot*F tem valores vetoriais. Ou seja, *rot*F é ele próprio um campo vetorial.

Exercícios

1) Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 y\,\mathbf{i} + 2y^3 z\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$$

2) Mostre que a divergência do campo do quadrado inverso

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{c}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

é nula

1) Resolução

Divergência de F

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3 z) + \frac{\partial}{\partial z}(3z)$$

$$div\mathbf{F} = 2xy + 6y^2 z + 3$$

Rotacional de F

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & 2y^3 z & 3z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial(3z)}{\partial y} - \frac{\partial(2y^3 z)}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial(3z)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 y)}{\partial z}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} - \frac{\partial(2y^3 z)}{\partial x}\right]\mathbf{k}$$

$$rot\mathbf{F} = -2y^3\mathbf{i} - x^2\mathbf{k}$$

2) Resolução

Levando-se em conta que $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{cx}{r^3}\mathbf{i} + \frac{cy}{r^3}\mathbf{j} + \frac{cz}{r^3}\mathbf{k}$$

Daí,

$$div\mathbf{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]c$$

Sendo,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) &= \frac{r^3 - x\left(\partial r^3/\partial x\right)}{(r^3)^2}\\ \frac{\partial r^3}{\partial x} &= \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} 2x = \frac{x}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

Analogamente,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) &= \frac{r^3 - y\left(\partial r^3/\partial y\right)}{(r^3)^2}\\ \frac{\partial r^3}{\partial y} &= \frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} 2y = \frac{y}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) &= \frac{r^3 - z\left(\partial r^3/\partial z\right)}{(r^3)^2}\\ \frac{\partial r^3}{\partial z} &= \frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} 2z = \frac{z}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

$$\mathit{Assim,}\ \mathit{div}\mathbf{F} = \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)c = \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right)c$$

$$= \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right)c = 0$$

Interpretações Física e Geométrica para o divergente

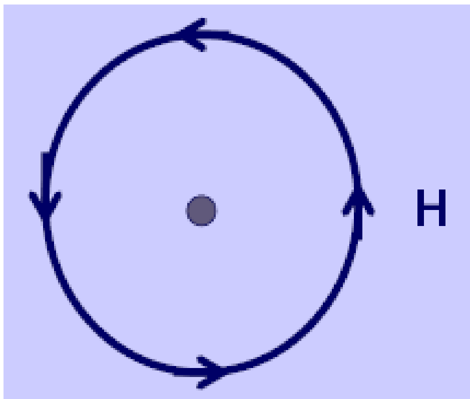
O divergente de um vetor, mede a variação do fluxo desse vetor.

O divergente pode ser entendido no contexto da Mecânica dos fluidos como:

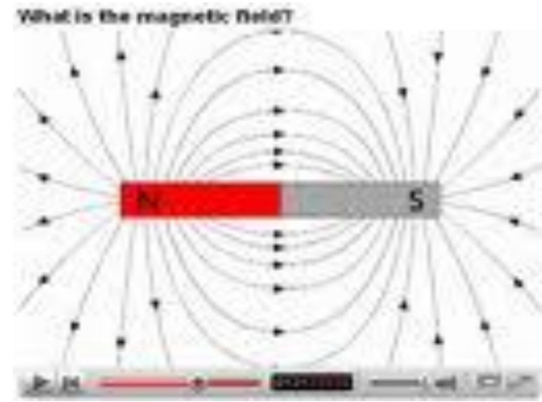
→ Se F(x,y,z) é a velocidade de um fluido, então, divF representa a taxa líquida de variação, com relação ao tempo, da massa de fluido que passa pelo ponto (x, y, z).

→ Em outras palavras, divF, calculado num ponto (x_0, y_0, z_0) mede a tendência de um fluido deferir no ponto (x_0, y_0, z_0).

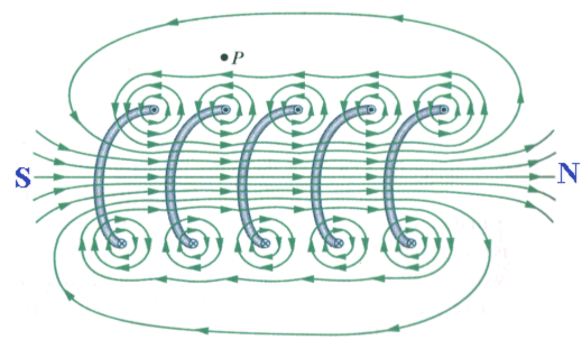
→ **Campos magnéticos não são divergentes,**



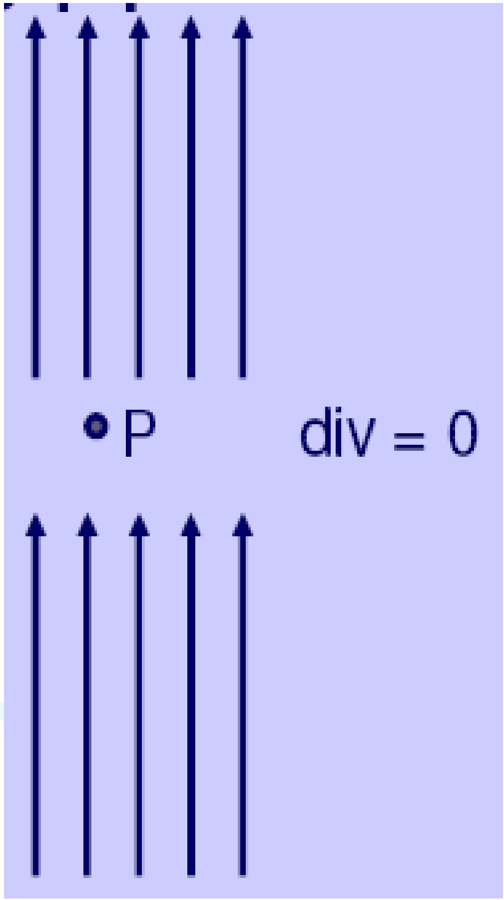
$$div\mathbf{H} = 0$$



→ **Uma fonte de campo magnético é ao mesmo tempo fonte e sorvedouro do campo.**



→ **Campos vetoriais constantes,**



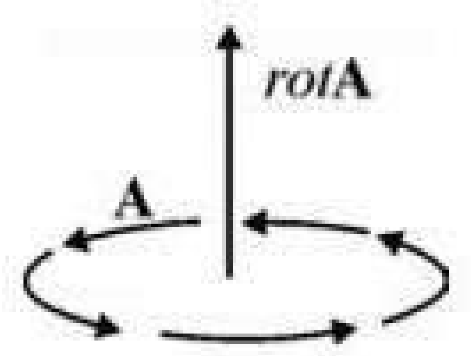
Universidade Federal do ABC

Interpretações Física e Geométrica para o rotacional

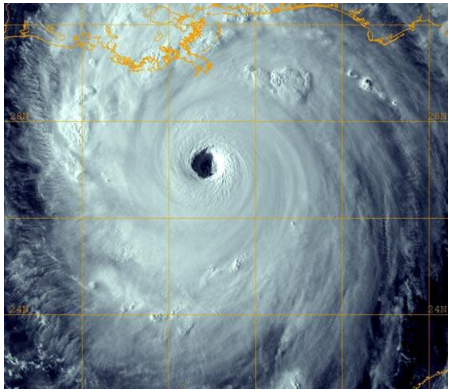
O vetor rotacional está associado com rotações.

Se F representa um campo de velocidades em Mecânica dos fluidos, por exemplo, então, partículas próximas de um ponto (x_0, y_0, z_0), tendem a rodar em torno do eixo que aponta para a direção definida pelo *rot*F calculado nesse ponto.

A magnitude do vetor *rot*F é uma medida do quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo. A rotação obedece a regra da mão direita.




Regra da mão direita


Furacão Katrina 25/08/2005

8. Alguns conceitos e teoremas importantes

Teorema 1

Se *f* é uma função escalar de três variáveis e que tem derivadas parciais de segunda contínuas. Então,

$$rot(\text{grad}\ f) = \nabla \times \nabla f = 0$$

Como um campo vetorial conservativo é tal que F =∇*f*, então, o teorema anterior pode ser reescrito como: Se F representa um campo vetorial conservativo, então,

$$rot\mathbf{F} = 0$$

Teorema 2

Se F = *f*(*x,y,z*)i + *g*(*x,y,z*)j + *h*(*x,y,z*)k é um campo vetorial no $\Re^3$ e *f, g, h* têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então,

$$div(rot\mathbf{F}) = 0$$

Laplaciano

É o resultado da aplicação do operador ∇ sobre si mesmo. É denotado por ∇^2. Tem a forma,

$$\nabla \bullet \nabla = \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Quando aplicado a uma função escalar Φ(*x,y,z*),

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Universidade Federal do ABC

Se

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

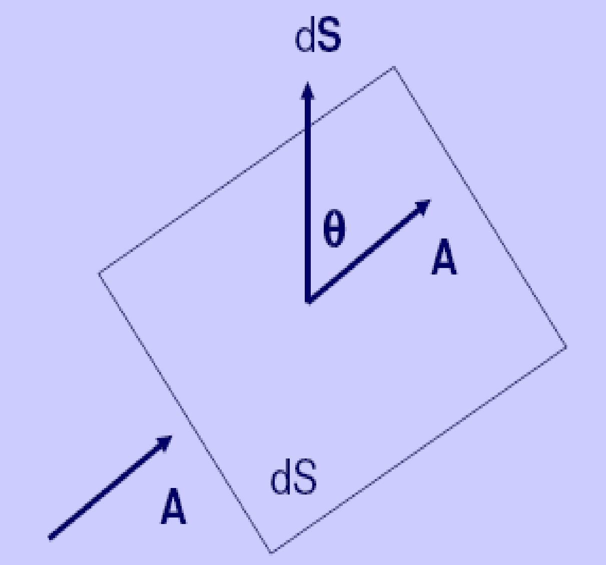
A equação $\nabla^2\Phi = 0$ é conhecida como equação de Laplace.

Fluxo de um Vetor qualquer A

A quantidade do vetor A, que passa por uma determinada superfície *d*S é,

$$d\phi = \mathbf{A} \bullet \mathbf{n} dS = \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}$$

Convenciona-se que n*dS* = *d*S sempre aponta para fora e é perpendicular à superfície fechada *dS.*



Teorema da divergência

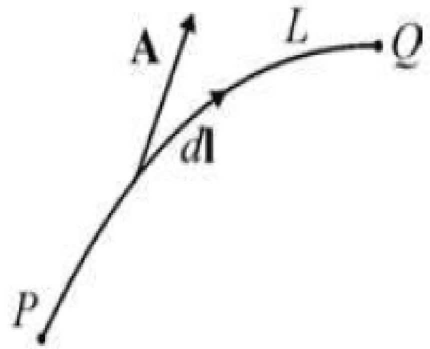
$$\phi = \oint_{s} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S} = \int_{V} div\mathbf{A}\, dS$$

A igualdade das duas integrais acima significa que o fluxo do vetor A através de uma superfície fechada *S* é igual à integral do divergente de A no volume V envolto por *S*

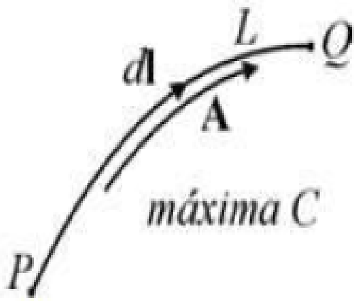
Circulação de um Vetor

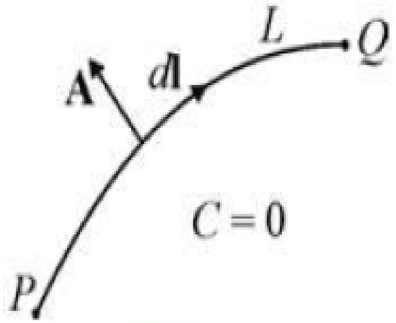
A circulação de um campo vetorial A ao longo de uma linha *L* do ponto *P* ao ponto *Q*, conforme a figura abaixo, é dada por,

$$C_P^Q = \int_P^Q \mathbf{A} \bullet d\mathbf{L}$$



***d*L simboliza uma parcela elementar da linha orientada *L*.**





Teorema de Stokes

O fluxo rotacional de um campo vetorial F através de uma superfície aberta *S* é igual à circulação do vetor A ao longo do caminho *L* que delimita *S.*

$$\oint_L \mathbf{A} \bullet d\mathbf{L} = \iint_S rot\mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}$$

Se A for uma força, esse teorema é uma forma de calcular o trabalho realizado por essa força ao longo do caminho *L.*