

Capítulo 5 – Análise com volumes de controle fixos

Como dito anteriormente, a análise de alguns problemas de Mecânica dos Fluidos aplicados a engenharia é mais fácil, e adequada, quando feita a partir da consideração de volumes de controle.

Exemplos

- ▶ Tempo para preenchimento de um tanque com líquido.
- ▶ Força para manter uma turbina presa em uma bancada de testes.
- ▶ Transferências de líquidos entre dois tanques desnivelados.
- ▶ Etc.



Conceitos básicos para abordagem desses problemas

- ▶ **Conservação da massa.**
- ▶ **Segunda lei de Newton.**
- ▶ **Leis fundamentais da termodinâmica.**
- ▶ **Teorema de Reynolds (forma geral).**

$$\frac{DB_{\text{SIS}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

5.1 Conservação da massa e equação da continuidade

5.1.1 Derivação da equação da continuidade

► Um sistema é definido como uma quantidade de massa fixa e identificável de um material. Desta definição, e do princípio da conservação de massa, vem que,

$$\frac{DM_{\text{SIS}}}{Dt} = 0$$

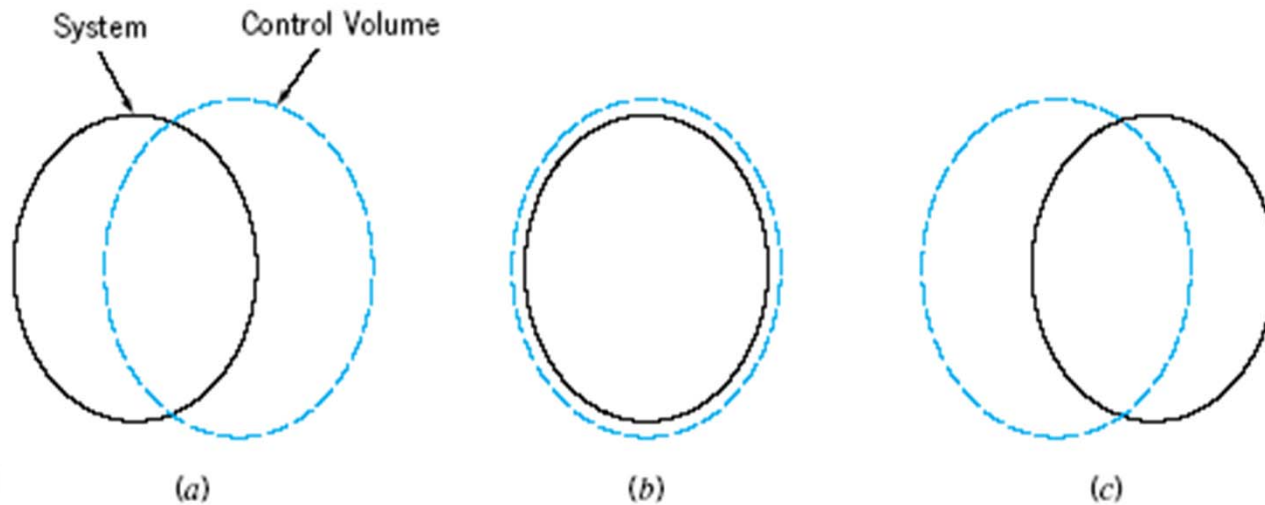
► Assim, se a massa é o parâmetro físico, como na equação anterior, teremos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

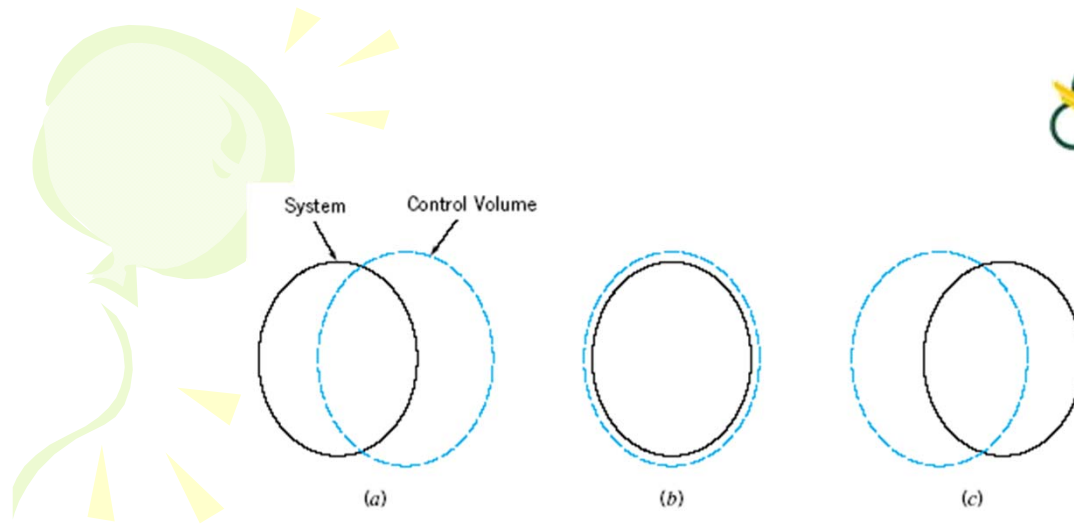
Significa que a taxa de variação de massa no volume de controle somada à vazão líquida de massa através da superfície de controle é nula.

Seguindo a discussão,

► Consideremos a figura a seguir que mostra um sistema e um volume de controle fixo, coincidentes num dado instante t .



- (a) em $t - \delta t$.
- (b) em t (coincidentes).
- (c) em $t + \delta t$.



$$M_{SIS} = \int_{SIS} \rho dV$$

► **Aplicando o teorema de Reynolds.**

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

Taxa de variação temporal da massa do sistema coincidente.

Taxa de variação temporal da massa no volume de controle coincidente.

Vazão líquida de massa através da superfície de controle.



Ponderações.

▶ Se o escoamento é permanente, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0$

▶ A vazão em volume através da área dA da superfície de controle é,

$$Q = \int \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

▶ A vazão em massa através de dA é, $\dot{m} = \int \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$

▶ Se o escoamento é para fora do volume de controle, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} > 0$

▶ Se o escoamento é para dentro do vol. de controle, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} < 0$

Com essas ponderações.

$$\underbrace{\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA}_{\text{Difícil de calcular em alguns casos}} = \underbrace{\sum \dot{m}_{sai} - \sum \dot{m}_{entra}}_{\text{Fácil de medir na maioria dos casos}} = \dot{m} = 0$$

Difícil de
calcular em
alguns casos

Fácil de medir
na maioria
dos casos

Onde

- \dot{m} é vazão em massa líquida total no volume de controle (kg/s).
- \dot{m}_{entra} é vazão em massa que entra no volume de controle (kg/s).
- \dot{m}_{sai} é vazão em massa que sai no volume de controle (kg/s).



► A vazão em massa, \dot{m} , através de uma superfície de controle de área, A , pode ser dada por,

$$\dot{m} = \rho Q = \rho VA$$

Onde ρ é a massa específica e V é perpendicular a A .



► A equação acima só representa a realidade, se considerarmos valores médios para ρ e V ao longo do escoamento. Assim, como

$$\dot{m} = \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$



Vem que,

$$\bar{\rho} \bar{V} A = \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \rightarrow \bar{V} = \frac{\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA}{\bar{\rho} A}$$

► Se o perfil de velocidade do escoamento é uniforme na seção transversal que apresenta área A , isto é, se o escoamento for unidimensional, temos,

$$\bar{V} = \frac{\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA}{\bar{\rho} A} = U$$

Onde U é a velocidade do escoamento.

Assim, num ponto da superfície de controle...



$$\dot{m} = \rho Q = \rho A V$$

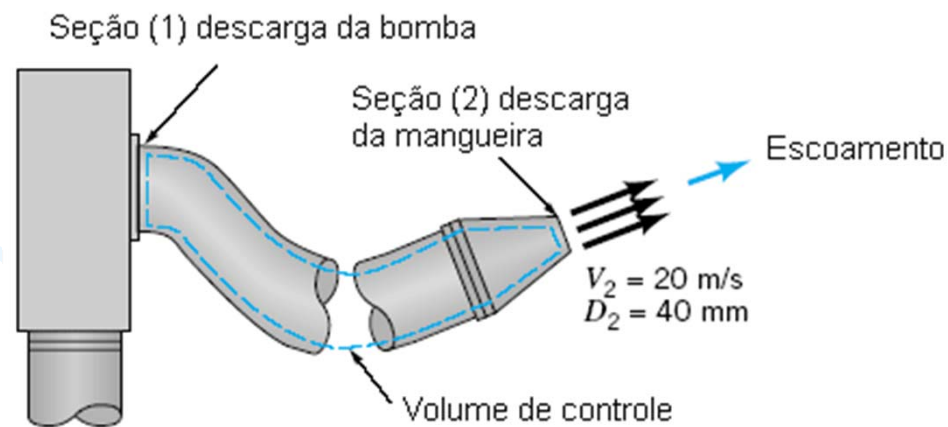
$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

► (se a velocidade e a densidade forem constantes ao longo da área A)

5.1.2 Volumes de controle fixos e indeformáveis

Exemplos

1) A água do mar escoar em regime permanente no bocal cônico mostrado na figura abaixo. No bocal, está instalado uma mangueira e esta é alimentada por uma bomba hidráulica. Qual deve ser a vazão em volume da bomba para que a velocidade de descarga da seção do bocal seja igual a 20 m/s?



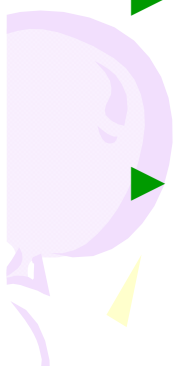


Solução

- ▶ O volume de controle contém, em qualquer instante, a água do mar que está contida na mangueira.
- ▶ Temos informações sobre a seção de descarga do bocal. Assim, poderemos encontrar a vazão no volume de controle.
- ▶ Aplicando o teorema de Reynolds,

$$\frac{DM_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

- ▶ Como o regime é permanente, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = 0$



- ▶ Logo, $\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0, \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2$



► Por outro lado, como o regime é permanente,

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$


$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$$



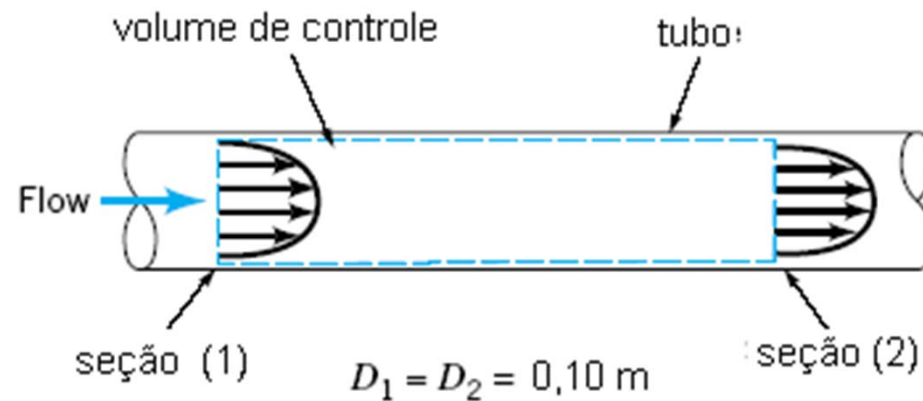
► Ainda temos $\rho_1 = \rho_2$, portanto, $Q_1 = Q_2$

► Daí,

$$Q_1 = Q_2 = V_2 A_2 = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2$$

$$Q_1 = 20 \times \frac{\pi}{4} (0,040)^2 = 0,0251 \text{ m}^3 / \text{s}$$


2) O ar escoia entre duas seções de um tubo de diâmetro igual a 10 cm, como mostrado na figura abaixo. As distribuições de pressão e temperatura são uniformes em cada seção. Se a velocidade média do ar na seção (2) é 304,8 m/s, calcule a velocidade média na seção (1).



$$p_1 = 689,5 \text{ kPa}$$
$$T_1 = 540 \text{ °R}$$

$$p_2 = 126,87 \text{ kPa}$$
$$T_2 = 453 \text{ °R}$$
$$V_2 = 304,8 \text{ m/s}$$



Solução

► O volume de controle indicado na figura contém, a todo instante, o ar em quantidade constante, já que o escoamento é permanente.

► Aplicando o teorema de Reynolds,

$$\frac{DM_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{VC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$



► Como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0 \quad (\text{escoamento permanente})$$

► Então,

$$\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

$$\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0$$


$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1$$



► Seguindo,


$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1$$
$$\rho_1 \bar{V}_1 A_1 = \rho_2 \bar{V}_2 A_2$$

► Não podemos considerar $\rho_1 = \rho_2$, pois a massa específica do ar varia com a pressão e a temperatura. Isto é,

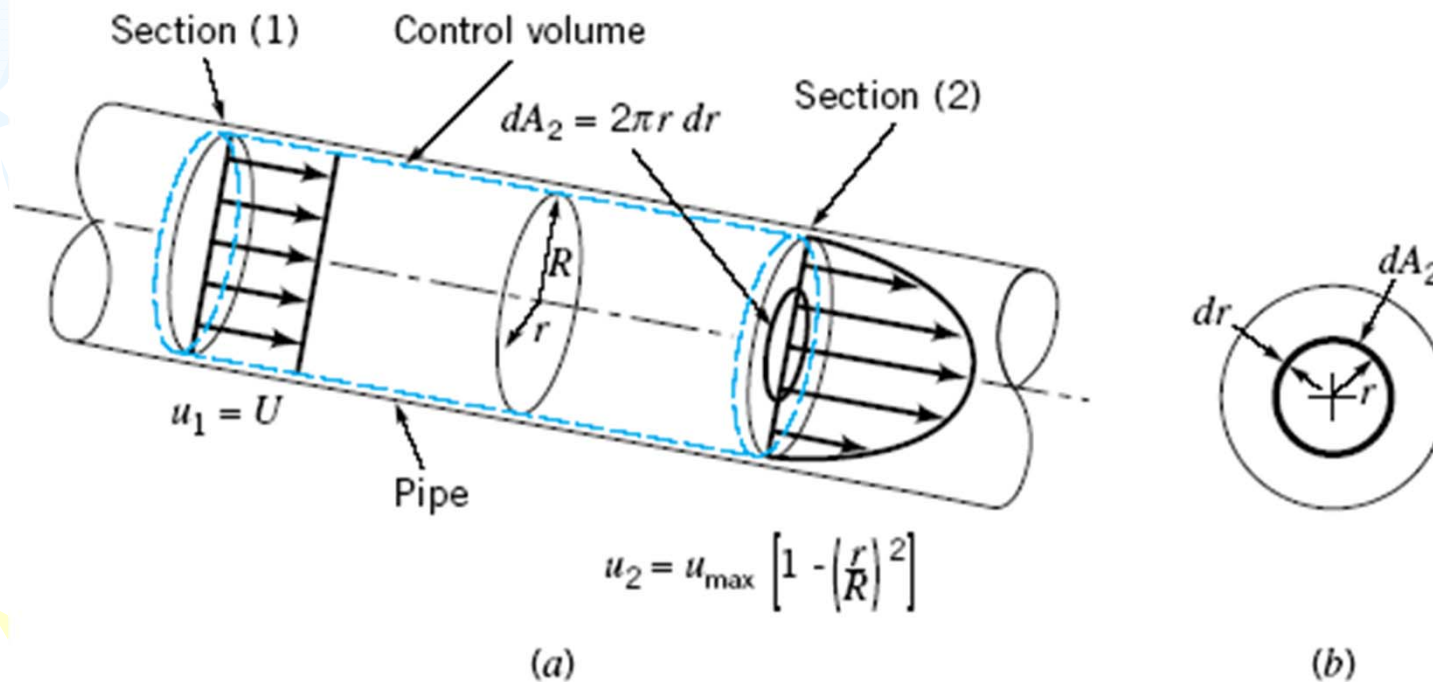

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

Assim,

$$\bar{V}_1 = \frac{\rho_2 \bar{V}_2 A_2}{\rho_1 A_1} = \frac{\frac{p_2}{RT_2} \bar{V}_2 A_2}{\frac{p_1}{RT_1} A_1} = \frac{p_2 T_1 \bar{V}_2}{p_1 T_2}$$


$$\bar{V}_1 = \frac{126,87 \text{ k} \times 540 \times 304,8}{689,5 \text{ k} \times 453} = 66,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3) A figura a seguir mostra o desenvolvimento de um escoamento laminar de água num tubo reto (raio R). O perfil de velocidade na seção (1) é uniforme com velocidade U paralela ao eixo do tubo. O perfil de velocidade na seção (2) é assimétrico, parabólico e com velocidade nula na parede do tubo. Qual a relação existente entre U e u_{Max} ? Qual a relação existente entre a velocidade média na seção (2), $V_{\text{Med}(2)}$, e u_{Max} ?





Solução

- **Aplicando o teorema de Reynolds,**

$$\frac{DM_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{VC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

- **Como,** $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0$ **(escoamento laminar permanente)**

- **Então,** $\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$
 $\int_{A1} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A2} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$

- **Na seção 1, $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ e ainda, \mathbf{U} é perpendicular a A_1 . Logo,**

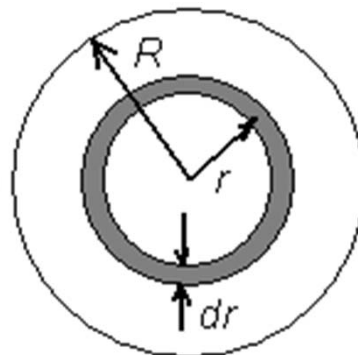
$$\int_{A1} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A1} \rho U \cos(180) dA = -\rho U A$$

Seguindo,

$$-\rho UA + \int_{A_2} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

► **Agora, analisando a seção 2:**

- Os componentes de \mathbf{V} também são perpendiculares a área A_2 .
- \mathbf{n} aponta para fora, logo $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} > 0$.
- A seção A_2 é circular de raio R . Assim,



$$dA = 2\pi r dr$$

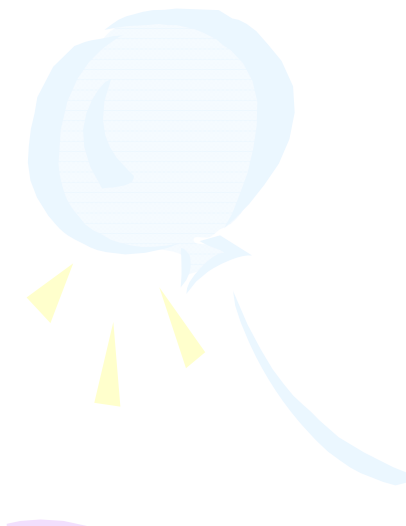


► Dessa forma,


$$-\rho UA + \int_0^R \rho u_2 2\pi r dr = 0$$

$$u_2 = u_{Max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Daí,


$$-\rho UA + \int_0^R \rho u_{Max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] 2\pi r dr = 0$$

$$-\rho U \pi R^2 + 2\pi \rho u_{Max} \int_0^R \left[1 - \frac{r^3}{R^2} \right] dr = 0$$


$$-\rho R^2 + 2u_{Max} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right] \Big|_0^R = 0$$



► Seguindo,

$$-U R^2 + 2u_{Max} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = 0$$

$$-U R^2 + 2u_{Max} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right) = 0$$

$$-U R^2 + 2u_{Max} \frac{R^2}{4} = 0 \Rightarrow u_{Max} = 2U$$



► Nas paredes da seção (2), $u = 0$. A velocidade máxima na seção (2), por sua vez, é $2U$. Desta forma,

$$\bar{V} = \frac{0 + u_{Max}}{2} = \frac{2U}{2} = U$$

► Cálculo formal de \bar{V}_2

$$\bar{V} = \frac{1}{\rho A} \int_A \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

$$\bar{V}_2 = \frac{1}{\rho \pi R^2} \int_0^R \rho u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] 2\pi r dr$$

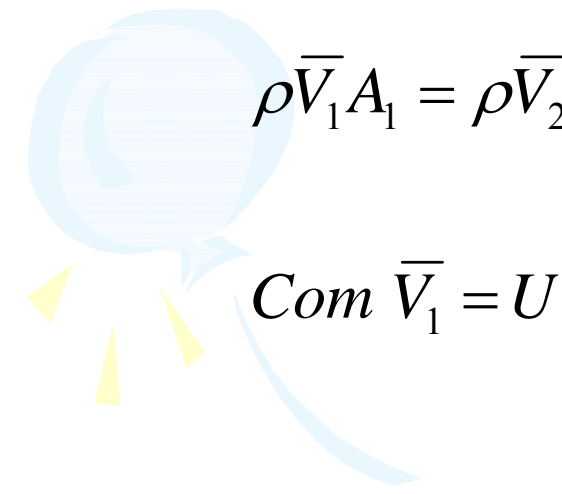
$$\bar{V}_2 = \frac{2u_{\max}}{R^2} \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr = \frac{2u_{\max}}{R^2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \frac{2u_{\max}}{R^2} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right]$$

$$\bar{V}_2 = \frac{2u_{\max}}{R^2} \frac{R^2}{4} \Rightarrow \bar{V}_2 = \frac{u_{\max}}{2} = U$$



► **Solução Proposta pela aluna Patrícia Martins**

*Sendo o escoamento permanente e incompressível,
e as áreas de entrada e saída iguais. Então,*


$$\rho \bar{V}_1 A_1 = \rho \bar{V}_2 A_2$$

Com $\bar{V}_1 = U = \text{constante}$. Vem que, $\bar{V}_2 = U$

O exercício anterior, trata do “escoamento de Poiseuille”

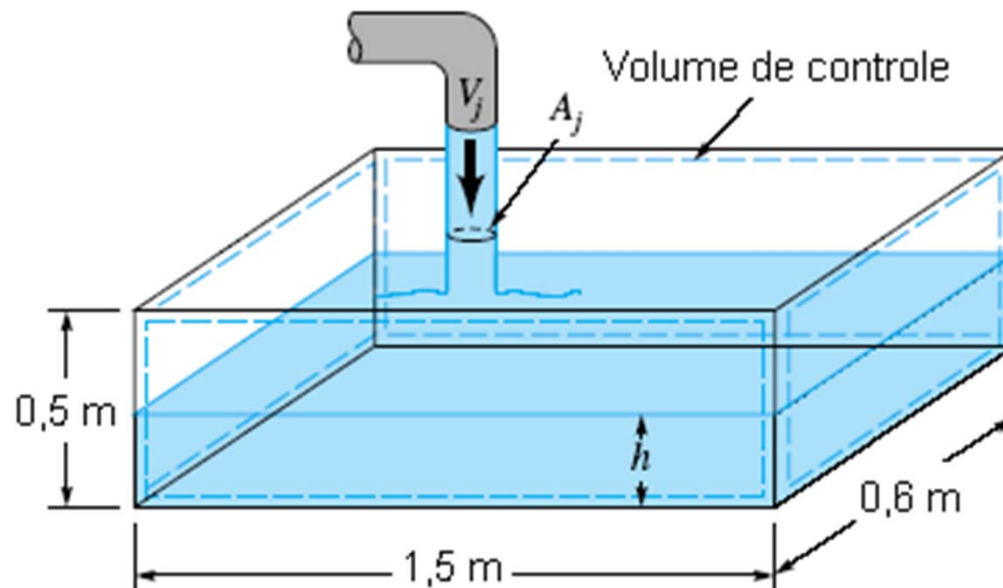
$$u(r) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

- ▶ **Descoberto experimentalmente por Poiseuille durante estudos sobre o movimento de sangue na artéria aorta.**
- ▶ **A unidade de viscosidade, *poise*, é uma homenagem aos seus trabalhos.**



Jean Louis Marie Poiseuille
(1797 - 1869)

4) A banheira retangular mostrada na figura abaixo está sendo enchida com água fornecida por uma torneira. A vazão em volume é constante e igual a $2,0 \text{ m}^3/\text{h}$. Determine a taxa de variação temporal da profundidade, h , de água na banheira.





Solução

► O volume de controle contém, em qualquer instante, a água acumulada na banheira, a água descarregada pela torneira e o ar.

► Aplicando o teorema de Reynolds,

$$\frac{DM_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Var} \rho_{ar} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vágua} \rho_{água} dV - \dot{m}_{água} + \dot{m}_{ar} = 0$$



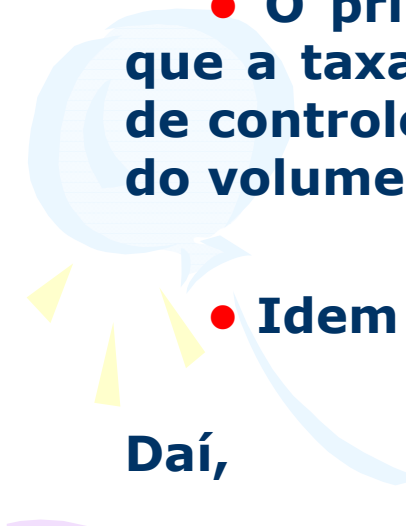
► **Ponderações:**


- **As taxas de variação temporal das massas de ar e água, isoladamente, não são nulas.**

- **O princípio da conservação da massa nos leva ao fato que a taxa de variação temporal da massa de ar no volume de controle precisa ser igual ao fluxo de ar que sai de dentro do volume.**

- **Idem para água.**

Daí,


$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{ar}} \rho_{ar} dV + \dot{m}_{ar} = 0$$


$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{água}} \rho_{água} dV - \dot{m}_{água} = 0$$

► A taxa de variação temporal da massa de água pode ser calculada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\text{água}}} \rho_{\text{água}} dV = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_{\text{água}} \int_{V_{\text{água}}} dV \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\rho_{\text{água}} (V_{\text{banheira}} + V_j)]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\text{água}}} \rho_{\text{água}} dV = \frac{\partial}{\partial t} [\rho_{\text{água}} (h \times 0,6 \times 1,5) + (0,5 - h)A_j]$$

Onde

$V_{\text{banheira}} = h \times 0,6 \times 1,5$ é o volume água na banheira em t .

$V_j = (0,5 - h)A_j$ é o volume de água na banheira em $t + \delta t$.

A_j é a área transversal do jato d'água.

Daí, vem que,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_{\text{água}} (h \times 0,6 \times 1,5) + (0,5 - h)A_j] = \dot{m}_{\text{água}}$$

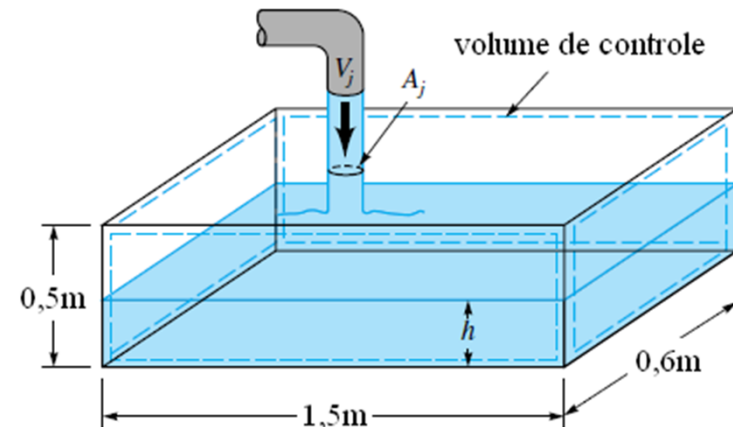
► Na equação abaixo, h é o único parâmetro a variar, logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_{\text{água}} (h \times 0,6 \times 1,5) + (0,5 - h) A_j] = \dot{m}_{\text{água}}$$

$$\rho_{\text{água}} (0,9 - A_j) \frac{\partial h}{\partial t} = \dot{m}_{\text{água}}$$

mas $\dot{m}_{\text{água}} = \rho_{\text{água}} Q_{\text{água}}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q_{\text{água}}}{(0,9 - A_j)}$$



► Assumindo que $A_j \ll 0,9$, teremos,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q_{\text{água}}}{0,9} = \frac{1}{0,9} \times \frac{2 \text{ m}^3}{3600 \text{ s}} = 6,2 \times 10^{-4} \text{ m/s} = 37 \text{ mm/min}$$

► Solução Proposta pelo aluno Alex Machado

Para um tempo t menor que o necessário para encher a banheira, temos

$$Q = \frac{\text{Volume}}{t} \quad \rightarrow \quad Qt = \text{Volume}$$

$$Qt = (1,5 \times 0,9 \times h) + (0,5 - h) \times A_j = 0,9h + 0,5A_j - A_jh$$

Derivando esta equação em relação ao tempo,

$$\frac{d}{dt}(Qt) = \frac{d}{dt}(0,9h) - \frac{d}{dt}(0,5A_j) - \frac{d}{dt}(A_jh)$$

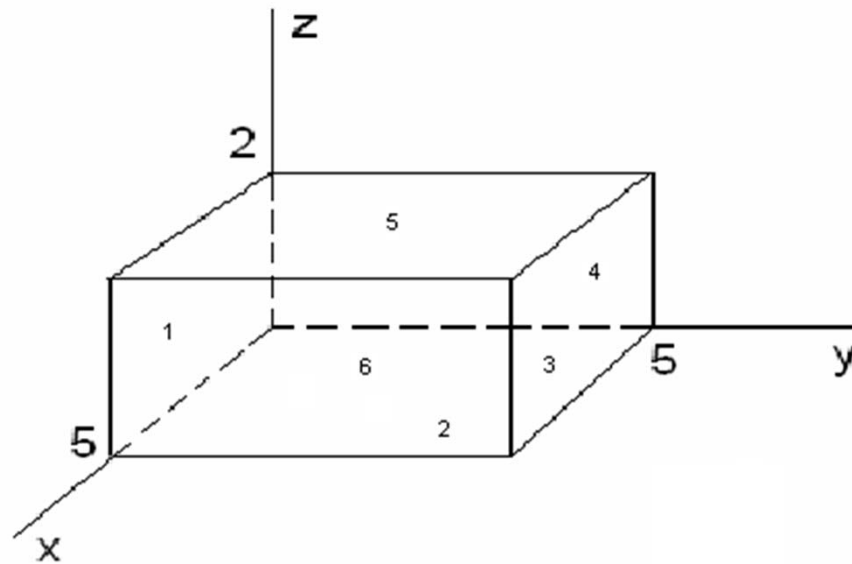
$$Q = 0,9 \frac{dh}{dt} - A_j \frac{dh}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{Q}{(0,9 - A_j)}$$

$$\text{Se } A_j \ll 0,9 \text{ teremos } \frac{dh}{dt} = \frac{Q}{0,9}$$

5) Um escoamento de água é descrito pelo campo de velocidade

$$\mathbf{V} = (3x + 2)\mathbf{i} + (2y - 4)\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$$

Determine a vazão em massa no paralelogramo mostrado na figura abaixo.





Solução


- **Aplicando o teorema de Reynolds,**

$$\frac{DM_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

- **Como** $\mathbf{V} = (3x + 2)\mathbf{i} + (2y - 4)\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$

temos um escoamento permanente, logo, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0$

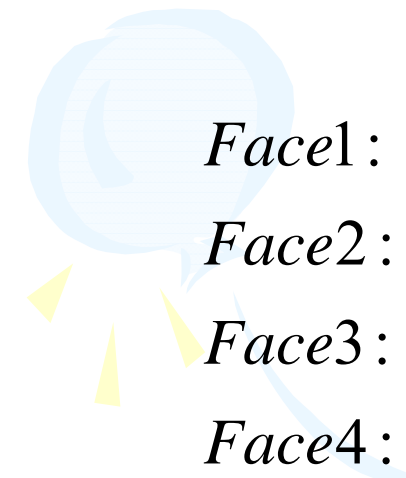
- **Assim,**


$$\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{m}_2 - \dot{m}_1 = \dot{m} = 0$$



► **Continuando,**

$$\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \rho \left\{ \int_{face1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 dA + \int_{face2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2 dA + \int_{face3} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_3 dA \right. \\ \left. + \int_{face4} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_4 dA + \int_{face5} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_5 dA + \int_{face6} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_6 dA \right\}$$



Face1: $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 = -3x - 2 \quad (0 \leq x \leq 5, 0 \leq z \leq 2)$

Face2: $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2 = 2y - 4 \quad (0 \leq y \leq 5, 0 \leq z \leq 2)$

Face3: $\mathbf{n}_3 = \mathbf{i} \rightarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_3 = 3x + 2 \quad (0 \leq x \leq 5, 0 \leq z \leq 2)$

Face4: $\mathbf{n}_4 = -\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_4 = -2y + 4 \quad (0 \leq y \leq 5, 0 \leq z \leq 2)$

Face5: $\mathbf{n}_5 = \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_5 = -5z \quad (0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5)$

Face6: $\mathbf{n}_6 = -\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_5 = 5z \quad (0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5)$



► **Daí,**

$$\dot{m} = 1000 \left\{ \int_0^5 \int_0^2 (-3x - 2) dz dx + \int_0^5 \int_0^2 (2y - 4) dz dx + \int_0^5 \int_0^2 (3x + 2) dz dy \right. \\ \left. \int_0^5 \int_0^2 (-2y - 4) dz dy + \int_0^5 \int_0^5 (-5z) dz dx + \int_0^5 \int_0^5 (5z) dz dy \right\}$$



Logo,

$$\dot{m} = 0$$

► **Este resultado mostra que a vazão líquida através da superfície de controle é nula e, portanto, a massa se conserva dentro do volume de controle (paralelogramo da figura).**

Características importantes dos exemplos anteriores

- ▶ Todos os escoamentos são permanentes e têm volumes de controle fixos. Logo,

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0$$

$$\rightarrow \sum \dot{m}_{sai} - \sum \dot{m}_{entra} = 0$$

$$\rightarrow \sum Q_{sai} - \sum Q_{entra} = 0$$

- ▶ Para um escoamento transitório, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV \neq 0$



► Se o volume de controle só apresenta uma seção de alimentação ou descarga, e o regime do escoamento é permanente,

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 \bar{V}_1 = \rho_2 A_2 \bar{V}_2$$



► Se for incompressível,

$$Q = A_1 \bar{V}_1 = A_2 \bar{V}_2$$

5.1.3 Volumes de controle indeformáveis e móveis

► Muitas vezes é necessário analisar um escoamento utilizando um volume de controle indeformável solidário a um referencial móvel.

► A velocidade do fluido em relação ao volume de controle móvel (velocidade relativa) é importante nesses casos. Sejam,

- W a velocidade do fluido vista por um observador solidário ao volume de controle.

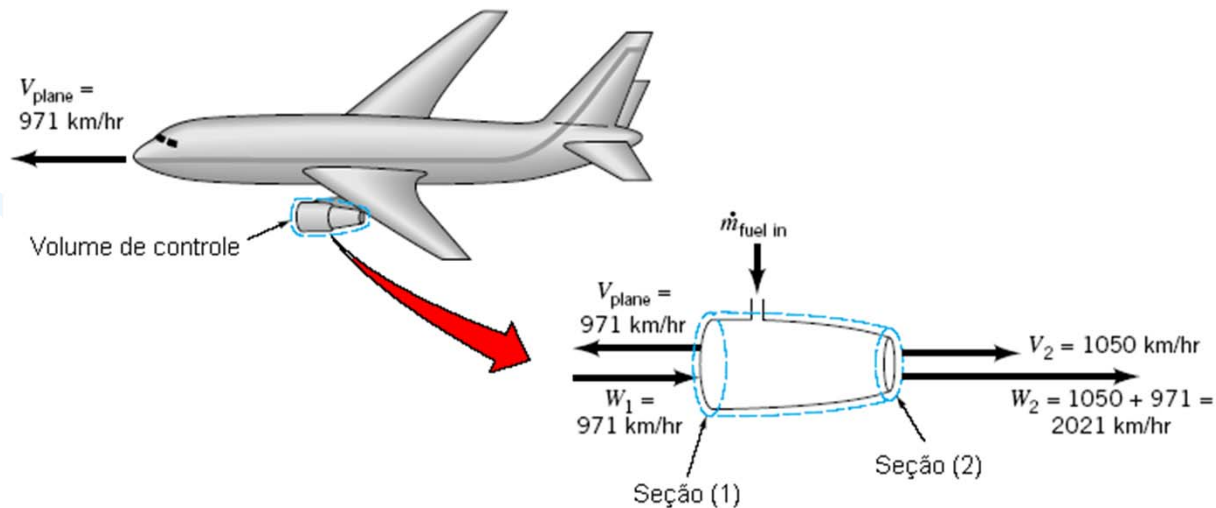
- V_{vc} a velocidade do volume de controle vista por um observador solidário a um referencial fixo a terra.

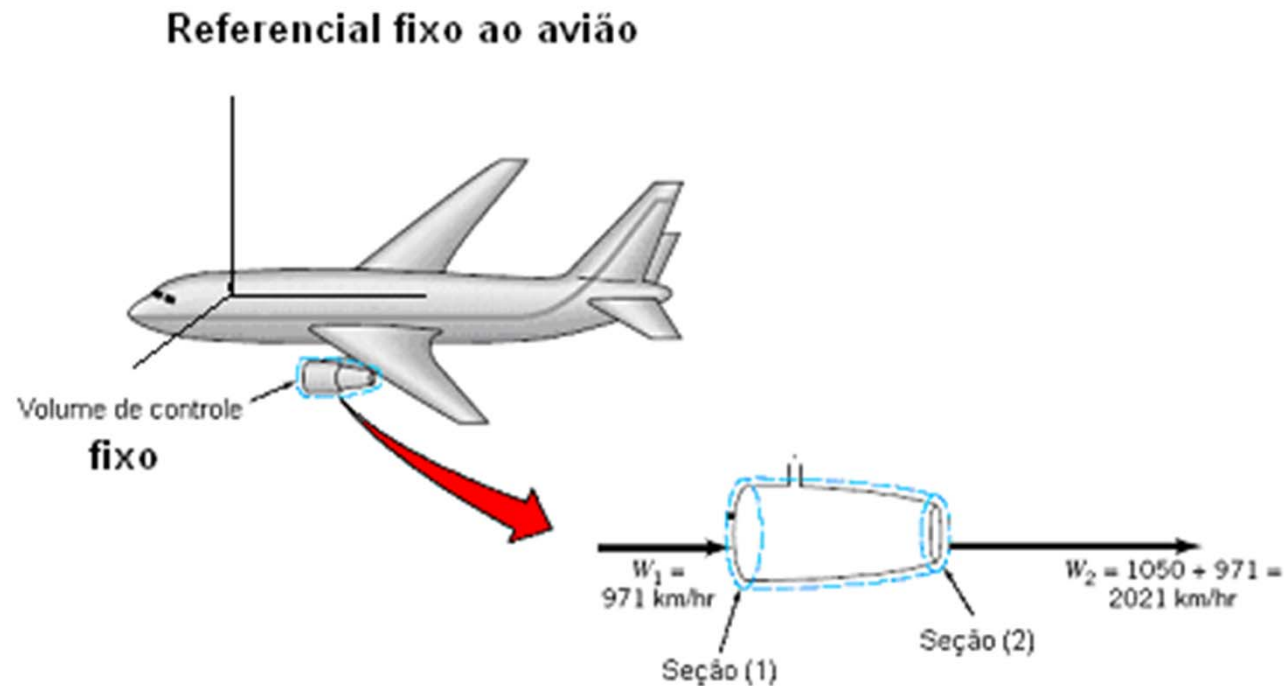
- V a velocidade do fluido vista um observador imóvel solidário ao referencial fixo a terra.

- Assim, $V = W + V_{vc} \quad \rightarrow \quad W = V - V_{vc}$

Exemplos

1) Um avião move-se com velocidade de 971 km/h como mostrado na figura abaixo. A área frontal da turbina é $0,8 \text{ m}^2$ e a massa específica do ar que entra por essa seção é $0,736 \text{ kg/m}^3$. Um observador **fixo a terra** observa que a velocidade de exaustão dos gases é de 1050 km/h. A área de exaustão da turbina é $0,558 \text{ m}^2$ e a massa específica dos gases exauridos é de $0,515 \text{ kg/m}^3$. Estime a razão de massa de combustível para dentro da turbina em kg/h.





No referencial fixo ao avião.

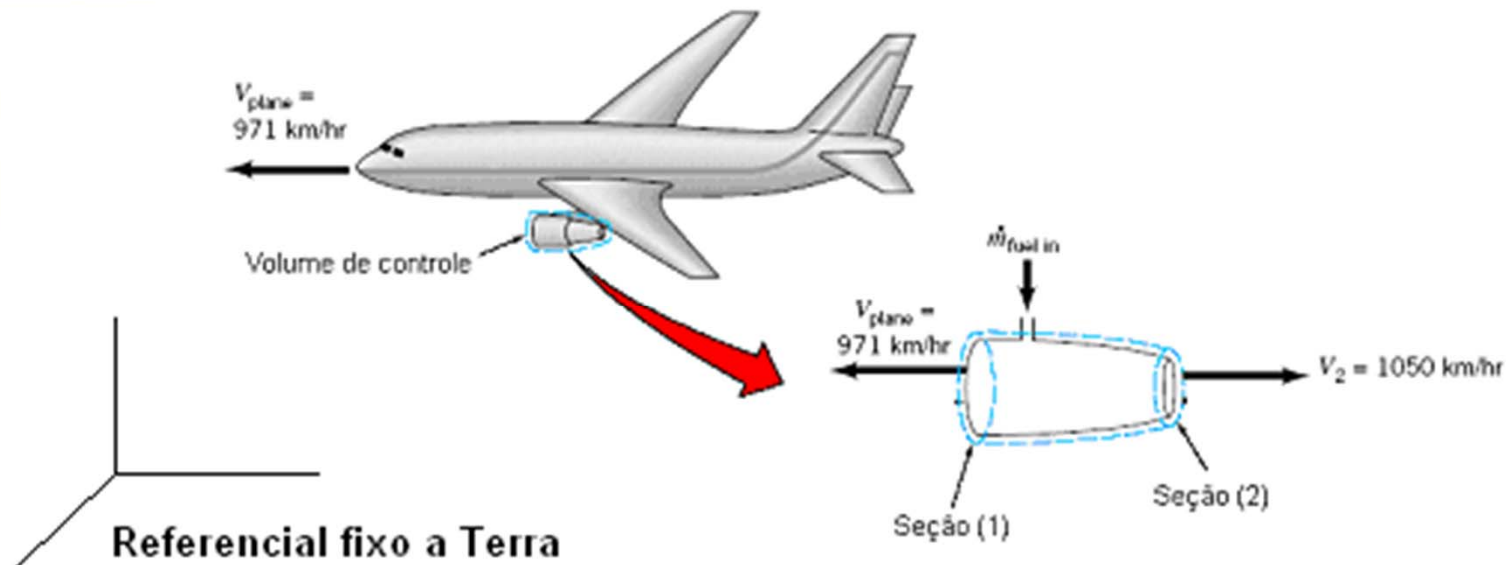
- W_1 é a velocidade do ar em relação ao avião.
- W_2 é a velocidade dos gases exauridos pela turbina em relação ao avião.

$$W_1 = 971 \text{ j } (km / h)$$

$$W_2 = ?$$

Mas

$$W_2 = V_{\text{fluido/terra}} - V_{\text{vol.controlo}}$$



No referencial fixo a Terra.

- \mathbf{V}_1 é a velocidade do avião em relação a Terra (= $\mathbf{V}_{Vol.Controle}$).
- \mathbf{V}_2 é a velocidade dos gases exauridos pela turbina em relação a Terra (= $\mathbf{V}_{fluido/Terra}$).

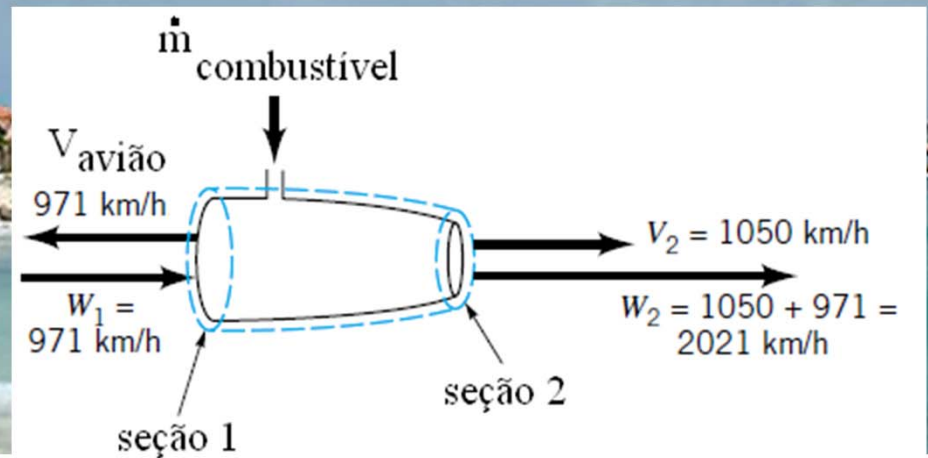
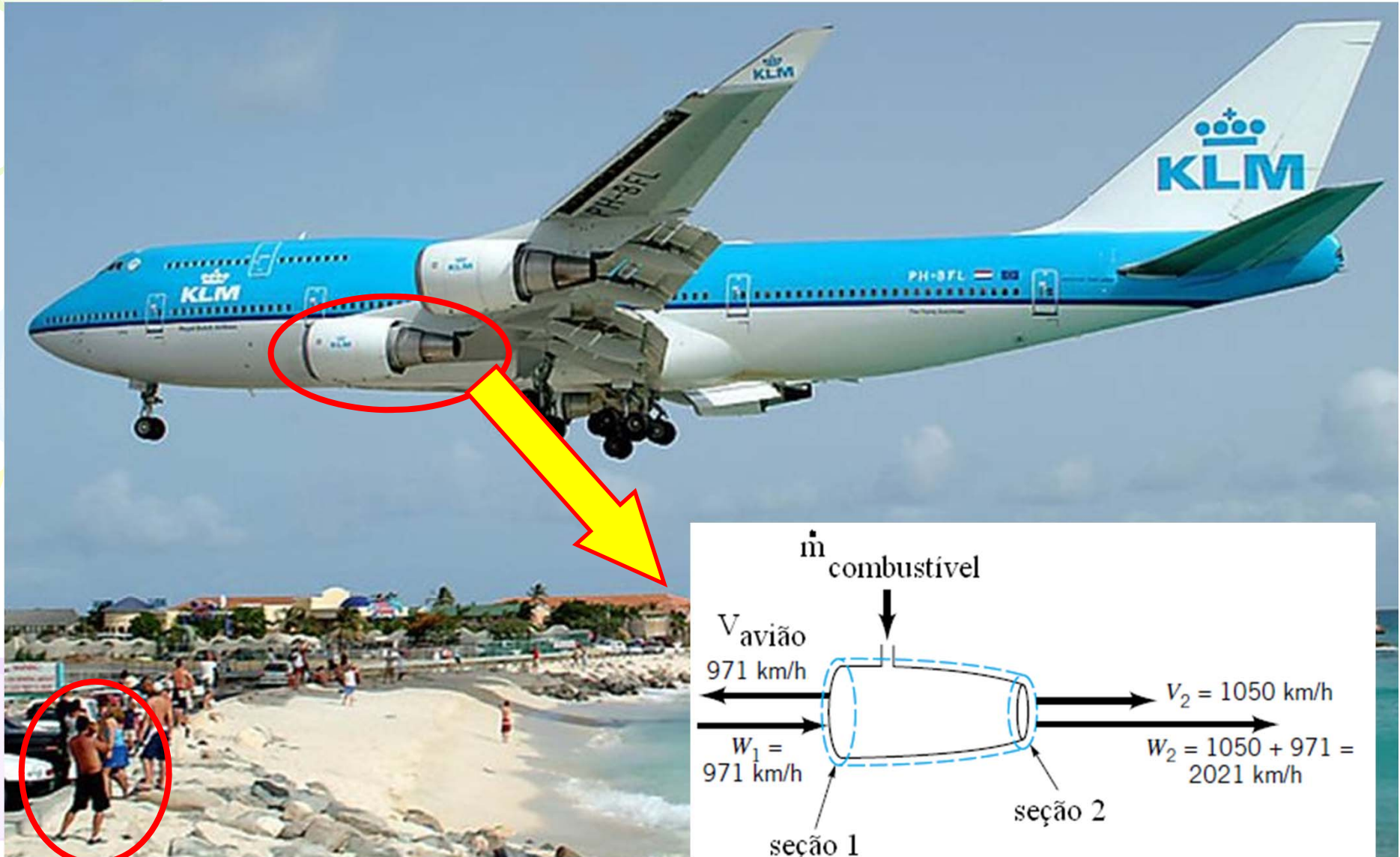
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{Vol. controle} = -971 \mathbf{j} \text{ (km / h)}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{fluido / terra} = 1050 \mathbf{j} \text{ (km / h)}$$

$$\text{Como } \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_{fluido / terra} - \mathbf{V}_{vol. controle} \text{ ,}$$

Então

$$\mathbf{W}_2 = 1050 \mathbf{j} - (-971 \mathbf{j}) = 2021 \mathbf{j} \text{ (km / h)}$$



Solução

▶ O volume de controle mostrada na figura contém todo ar, combustível e gases localizada no interior da turbina. Este volume é indeformável, porém, móvel para um referencial fixo a terra.

▶ Aplicando o teorema de Reynolds,

$$\frac{DM_{sis}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

▶ Temos um escoamento permanente, logo, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV = 0$

▶ Assim, $\int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{m}_{gás} - \dot{m}_{ar} - \dot{m}_{comb.} = 0$

$$\dot{m}_{comb.} = \dot{m}_{gás} - \dot{m}_{ar}$$



Continuando,

► **Da equação,** $\dot{m}_{comb.} = \dot{m}_{gás} - \dot{m}_{ar}$

► **Temos** $\dot{m}_{comb.} = \rho_{gás} W_2 A_2 - \rho_{ar} W_1 A_1$

Onde W_1 e W_2 são as velocidade de entrada e saída do volume de controle do ar e dos gases, respectivamente, para um observador solidário ao avião.


● **$W_1 = 971$ km/h.**

● **$W_2 = V_2 - V_{avião} = 1050 - (-971) = 2021$ km/h (veja página 38).**



► **Continuando,**

$$\dot{m}_{comb.} = \left(0,515 \frac{kg}{m^3}\right) \times (0,558 m^2) \times \left(2021 \times 10^3 \frac{m}{h}\right) - \left(0,736 \frac{kg}{m^3}\right) \times (0,80 m^2) \times \left(971 \times 10^3 \frac{m}{h}\right)$$


$$\dot{m}_{comb.} = 9100 \frac{kg}{h}$$

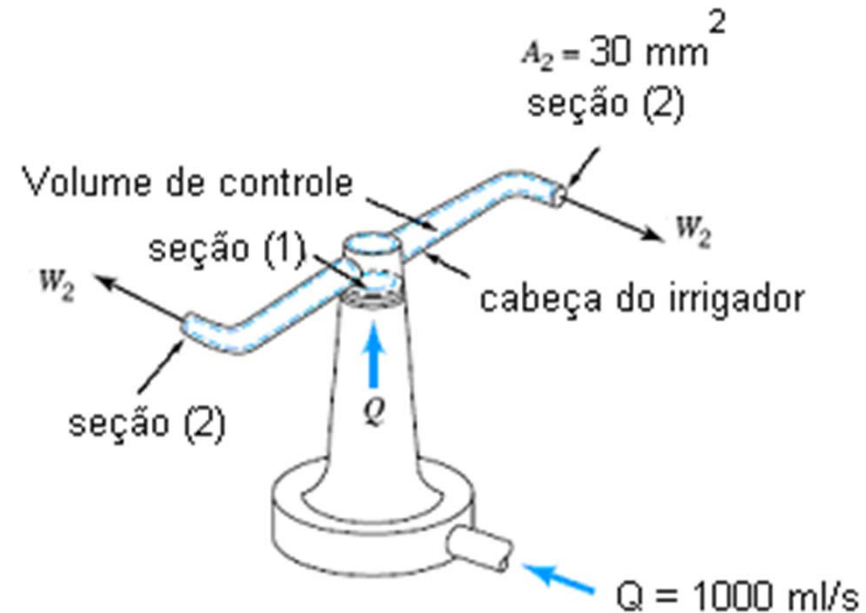
2) A vazão de água no irrigador de jardim da próxima figura é 1000 ml/s. Se a área de seção de descarga de cada um dos bocais do irrigador é de 30 mm², determine a velocidade da água que deixa o irrigador em relação ao bocal se:

(a) a cabeça do irrigador for imóvel.

(b) a cabeça do irrigador apresenta uma rotação de 600 rpm.

(c) a cabeça do irrigador acelera de 0 a 600 rpm.

Suponha que cada braço do irrigador tenha 20 cm de comprimento.



Solução

► O volume de controle mostrado na figura contém, em todo instante, toda água localizada na cabeça do irrigador. Este volume é indeformável, porém, móvel para um referencial fixo a terra.

► Aplicando o teorema de Reynolds,

$$\frac{DM_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

► Temos um escoamento permanente, logo, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0$

► Assim, $\int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{m}_{sai} - \dot{m}_{entra} = 0$

$$\dot{m}_{entra} = \dot{m}_{sai}$$

► Como há duas saídas e uma entrada,

$$\dot{m}_{sai} = 2\rho_{\acute{a}gua}A_2W_2 \quad e \quad \dot{m}_{entra} = \rho_{\acute{a}gua}Q$$

$$Daí, \quad 2\rho_{\acute{a}gua}A_2W_2 = \rho_{\acute{a}gua}Q$$

$$W_2 = \frac{Q}{2A_2}$$

$$W_2 = \frac{1000 \times 10^{-6}}{2 \times 30 \times 10^{-6}} = 16,7 \text{ m/s}$$

► Para os três casos, W_2 independe da velocidade angular do irrigador (W_2 foi calculada para um referencial fixo à cabeça do irrigador) e representa a velocidade (média) das seções de descarga.



► A velocidade para um observador fixo a terra é,

$$W_2 = V_2 + U \quad (V_2 = W_2 - U)$$

Onde U é a velocidade do bocal em relação a um referencial fixo a terra.

$U =$ Velocidade angular da cabeça do irrigador \times Raio da cabeça do dispositivo o

$$U = \omega r$$



► r é o raio do irrigador.

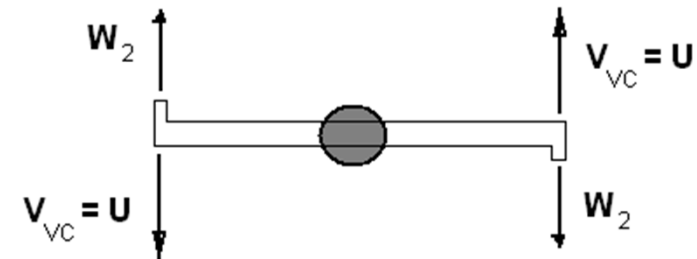
► Com relação a um observador estacionário...

$$V_2 = W_2 - U \quad U = \omega r$$

a) O irrigador está parado.

$$V_2 = W_2$$

$$V_2 = 16,7 \text{ m/s}$$



b) A cabeça gira a 600 rpm.

$$\begin{aligned} 1 \text{ rpm} &= 2\pi \text{ rad}\cdot\text{min}^{-1} \\ &= 2\pi/60 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ &\approx 0,10471976 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$600 \text{ rpm} = 62,83186 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$V_2 = W_2 - \omega r$$

$$V_2 = 16,7 - 62,83186 \times 0,2$$

$$V_2 = 4,13 \text{ m/s}$$



c) A cabeça do irrigador acelera de 0 a 600 rpm. Isto significa que $U = U(t) = \omega t r$

$$600 \text{ rpm} = 62,83186 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$


$$V_2(t) = W_2 - \omega(t)r$$

$$V_2(t) = 16,7 - 62,83186 \times 0,2 \times t$$

$$V_2(t) = 16,7 - 12,56637t \text{ (m/s)}$$

5.2 Segunda Lei de Newton – As equações da quantidade de movimento linear e do momento da quantidade de movimento

5.2.1 Derivação da equação da quantidade de movimento

► Segunda Lei de Newton,

Taxa de variação temporal da quantidade de momento linear do sistema = Soma das forças externas que agem sobre o sistema

► Para uma partícula fluida de massa $\rho d\mathcal{V}$, a quantidade de movimento é $d\mathbf{p} = \mathbf{V}\rho d\mathcal{V}$. Assim, a quantidade de movimento do sistema é,

Equação
vetorial

$$\mathbf{p} = \int_{SIS} \mathbf{V}\rho dV$$

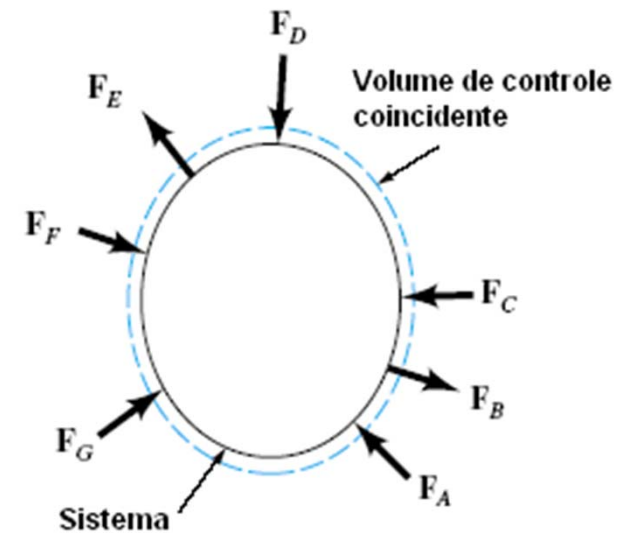
dV é diferencial
de volume

► **Aplicando a segunda Lei de Newton,**

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{SIS} \mathbf{V} \rho dV = \sum \mathbf{F}_{Sistema}$$

► **Considerando o caso em que o sistema coincide, mesmo que instantaneamente, com o volume de controle.**

$$\sum \mathbf{F}_{Sistema} = \sum \mathbf{F}_{Volume\ de\ controle\ coincidente}$$



► **Aplicando o Teorema de Reynolds,**

$$\frac{D}{Dt} M_{SIS} = \frac{D}{Dt} \int_{SIS} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

► **Multiplicando pelo vetor velocidade,**

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} \mathbf{V} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

Taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do sistema .

Taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do volume de controle.

Fluxo líquido de quantidade de movimento linear através da superfície de controle.



► **Combinando as equações,**

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} \mathbf{V} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{SIS} \mathbf{V} \rho dV = \sum \mathbf{F}_{Sistema}$$

$$\sum \mathbf{F}_{Sistema} = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{Volume de controle} \\ \text{coincidente}}}$$



► **Obtemos a equação da quantidade de movimento linear**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{Volume de controle} \\ \text{coincidente}}}$$



► **A somatória, $\sum F_{\text{Volume de controle coincidente}}$ contém,**

1. Forças de campo (mas, só consideraremos o campo gravitacional em nossos estudos).

2. Forças superficiais exercidas sobre o volume de controle pelo material que está localizado nas vizinhanças externa do volume de controle, por exemplo, paredes de um recipiente. Estas são forças de reação no fluido feitas pelas paredes que o confinam.

3. Um objeto imerso em um escoamento também exerce forças superficiais sobre o fluido.

5.2.2 Aplicação da equação da quantidade de movimento linear

► A equação,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\text{Volume de controle coincidente}}$$

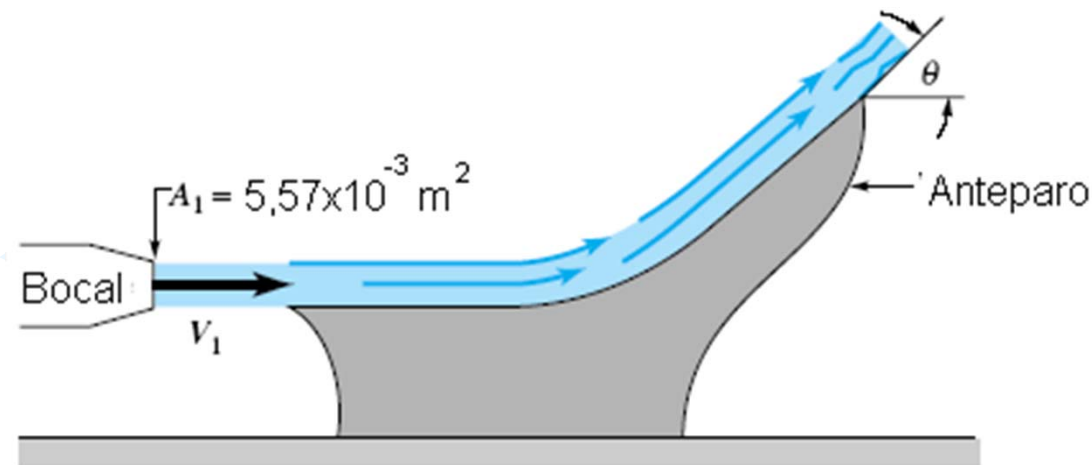
é vetorial e sua análise é feita em um sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) ou cilíndricas (r, θ, z) .

► Principais considerações para o uso da equação acima são: Escoamentos permanentes e unidimensionais.

(vídeos)

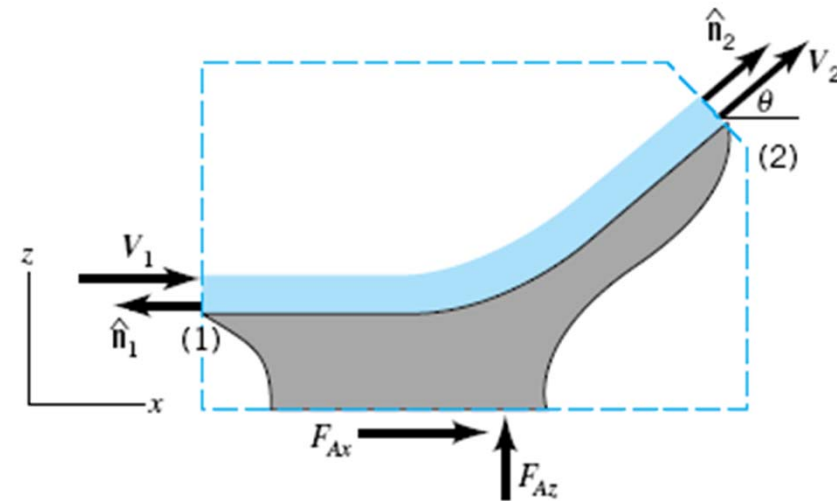
Exemplos

1) A figura abaixo mostra um jato de água horizontal incidindo num anteparo estacionário. O jato é descarregado do bocal com velocidade uniforme e igual a 3 m/s. O ângulo entre o escoamento de água, na seção de descarga do anteparo, e a horizontal é θ . Admitindo que os efeitos gravitacionais e viscosos são desprezíveis, determine a força necessária para manter o anteparo imóvel.



Solução

► Consideremos o volume de controle a seguir



► Aplicando a equação da quantidade de movimento,

Lembrando que

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

neste caso, $v = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\text{Volume de controle coincidente}}$$

Em componentes

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u \rho dV + \int_{SC} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_{Ax} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} w \rho dV + \int_{SC} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_{Az} \end{cases}$$

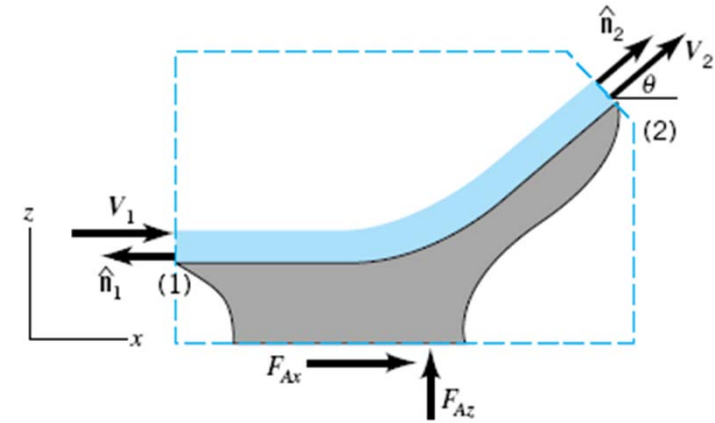
► **Se o regime de escoamento é permanente,**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} u \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} w \rho dV = 0$$

► **Ponderações,**

- **A água entra e sai do volume de controle como um jato livre a pressão atmosférica.**
- **Assim, a pressão que atua na superfície de controle é uniforme e igual a pressão atmosférica.**
- **A força líquida devida a pressão atmosférica é nula.**
- **Desprezando os pesos da água e do anteparo, as únicas forças que atuam no conteúdo do volume de controle são as componentes horizontal e vertical que mantêm o anteparo fixo.**

- Na seção 1 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -V_1$
- Na seção 2 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_2$
- Como desprezamos os efeitos gravitacionais e viscosos, $V_1 = V_2$
- $p_1 = p_2 = p_0$



► Assim, na seção 1, $u = V_1$

na seção 2, $u = V_1 \cos \theta$ e $w = V_1 \sin \theta$

Daí,

$$\int_{SC} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A1} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A2} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_{Ax}$$

$$\int_{SC} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A1} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A2} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_{Az}$$

► **Primeiro na direção x**

$$\int_{SC} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A1} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A2} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \mathbf{F}_{Ax}$$

$$V_1 \rho (-V_1) A_1 + V_1 \cos \theta \rho V_1 A_1 = F_{Ax} \quad (A_1 = A_2 \text{ e } V_1 = V_2)$$

$$F_{Ax} = -V_1^2 \rho A_1 + V_1^2 A_1 \cos \theta = -\rho A_1 V_1^2 (1 - \cos \theta) \text{ ou } F_{Ax} = \rho A_1 V_1^2 (\cos \theta - 1)$$

► **Na direção z**

$$\int_{SC} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A1} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A2} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \mathbf{F}_{Ay}$$

$$0 \rho (-V_1) A_1 + V_1 \text{sen } \theta \rho V_1 A_2 = F_{Az} \quad (A_1 = A_2 \text{ e } V_1 = V_2)$$

$$F_{Az} = \rho A_1 V_1^2 \text{sen } \theta$$

► Logo,

$$F_{Ax} = -\rho A_1 V_1^2 (1 - \cos \theta) \quad \text{ou} \quad F_{Ax} = -\dot{m} V_1 (1 - \cos \theta)$$

$$F_{Az} = \rho A_1 V_1^2 \sin \theta \quad \text{ou} \quad F_{Az} = \dot{m} V_1^2 \sin \theta$$

► Substituindo os valores fornecidos,

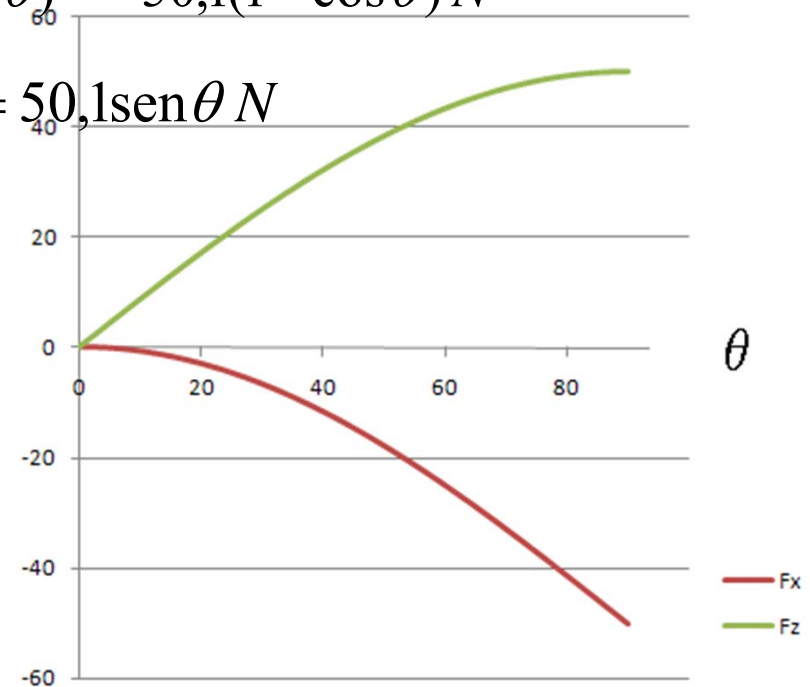
$$F_{Ax} = -(999)(5,57 \times 10^{-3})(3^2)(1 - \cos \theta) = -50,1(1 - \cos \theta) \text{ N}$$

$$F_{Az} = (999)(5,57 \times 10^{-3})(3^2) \sin \theta = 50,1 \sin \theta \text{ N}$$

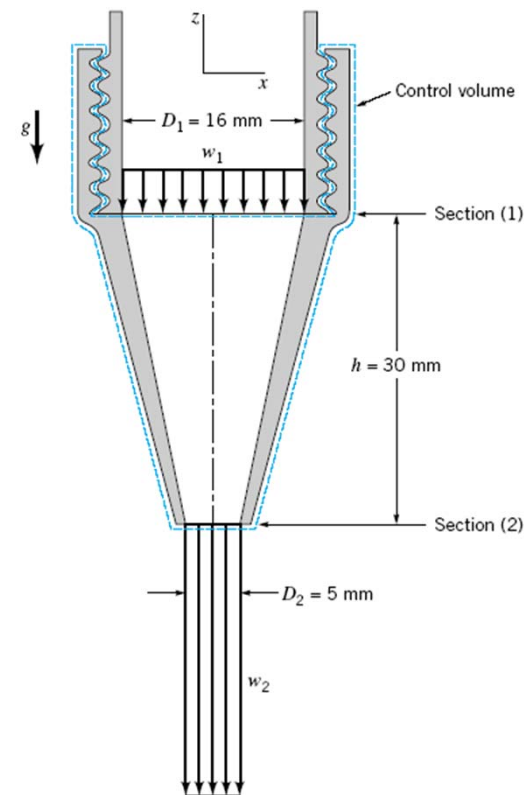
► Se $\theta = 0$ $F_{ax} = F_{az} = 0$.

► Se $\theta = 90^\circ$ $F_{ax} = F_{az} = 50,1 \text{ N}$.

► Se $\theta = 180^\circ$ $F_{ax} = -100,2 \text{ N}$ e $F_{az} = 0$.

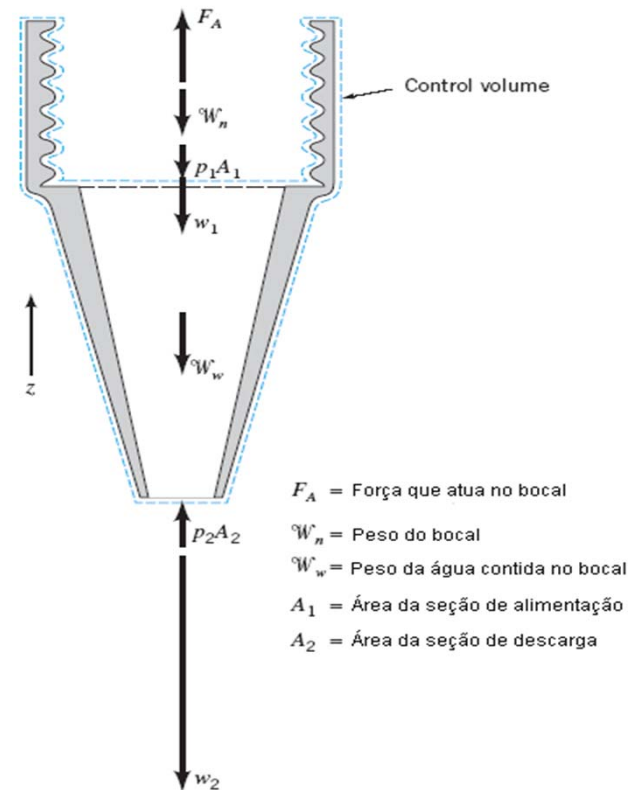


2) Determine a força necessária para imobilizar um bocal cônico instalado na seção de descarga de uma torneira de laboratório (figura) sabendo que a vazão de água na torneira é de 0,6 litros/s. A massa do bocal é de 0,1 kg e os diâmetros das seções de alimentação e descarga do bocal são, respectivamente, iguais a 16 mm e 5 mm. O eixo do bocal está na vertical e a distância axial entre as seções (1) e (2) é 30 mm. A pressão na seção (1) é de 464 kPa.



Solução

- ▶ A força procurada é a força de reação da torneira sobre a rosca do bocal.
- ▶ O volume de controle corresponde ao mostrado na figura ao lado.
- ▶ As forças verticais que atuam no conteúdo do volume de controle, estão mostradas na figura ao lado, menos a pressão atmosférica, cuja ação é nula em todas as direções.
- ▶ As forças devidas as pressões relativas não se anulam.



► Aplicando a equação da quantidade de movimento, na direção vertical,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} w \rho dV + \int_{SC} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\text{Volume de controle coincidente}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} w \rho dV + \int_{SC} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_A - W_n - p_1 A_1 - W_w + p_2 A_2$$

onde

F_A = Força que atua no bocal

W_n = Peso do bocal

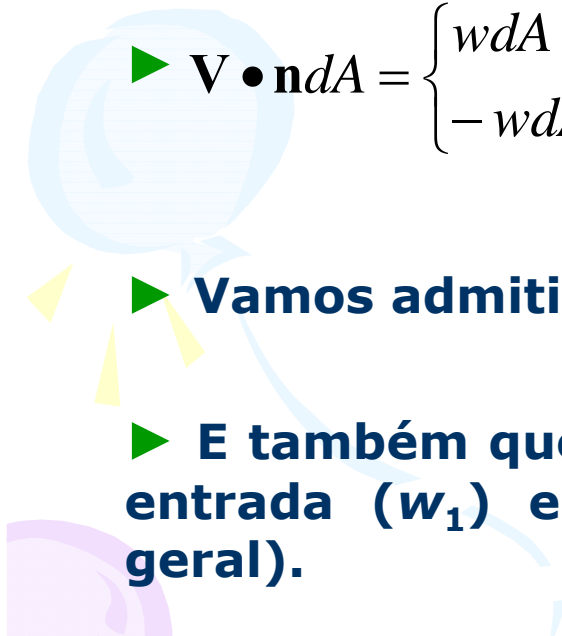
W_w = Peso da água contida no bocal

A_1 = Área da seção de alimentação

A_2 = Área da seção de descarga

- 
- ▶ **Se o regime de escoamento é permanente,**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} w \rho dV = 0$$

- 
- ▶ $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \begin{cases} w dA & \text{quando o escoamento sai do Volume de controle} \\ -w dA & \text{quando o escoamento entra no Volume de controle} \end{cases}$

- ▶ **Vamos admitir que os escoamento é incompressível**

- ▶ **E também que os perfis de velocidade sejam uniformes na entrada (w_1) e saída (w_2) (podem não ser em um caso geral).**
- 

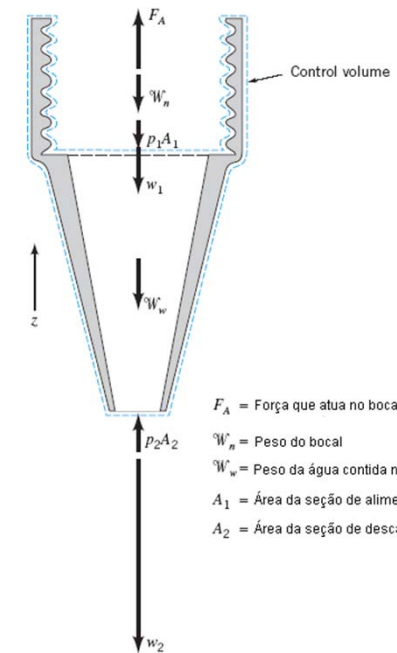
► Desta forma,

$$\int_{SC} w\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}dA = F_A - W_n - W_w - p_1A_1 + p_2A_2$$

$$\int_{S1} w\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}dA + \int_{S2} w\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}dA = F_A - W_n - W_w - p_1A_1 + p_2A_2$$

$$-w_1\rho(-w_1)A_1 - w_2\rho(w_2)A_2 = F_A - W_n - W_w - p_1A_1 + p_2A_2$$

Sinais negativos, pois as velocidades apontam para baixo



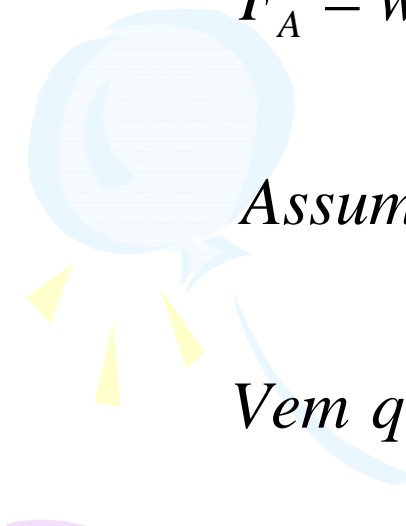


► Daí,

$$-w_1(-\dot{m}_1) - w_2(\dot{m}_2) = F_A - W_n - W_w - p_1A_1 + p_2A_2$$

e

$$F_A = w_1\dot{m}_1 - w_2(\dot{m}_2) + W_n + W_w + p_1A_1 - p_2A_2$$



Assumindo que $\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$ (conservação da massa)

Vem que

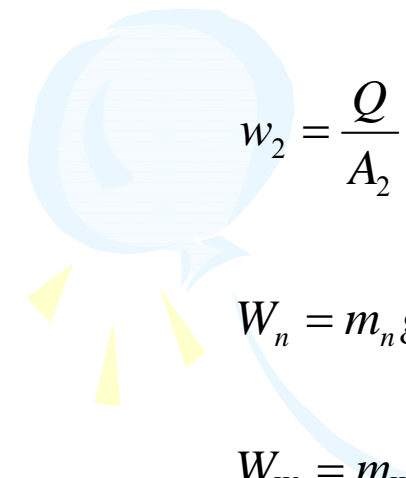

$$F_A = \dot{m}(w_1 - w_2) + W_n + W_w + p_1A_1 - p_2A_2$$



► **Substituindo os valores**

$$\dot{m} = \rho w_1 A_1 = \rho Q = 999 \times (0,6 \times 10^{-3}) = 0,6 \text{ kg / s}$$

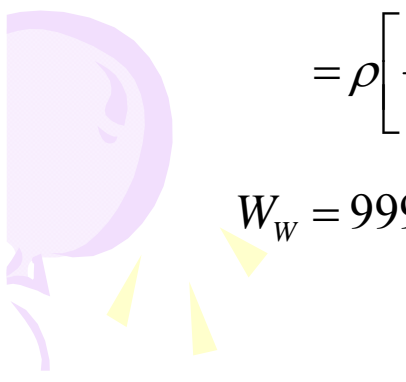
$$w_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0,6 \times 10^3 \text{ kg / s}}{\pi[(16 \times 10^{-3})^2 / 4]} = 3,0 \text{ m / s}$$


$$w_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,6 \times 10^3 \text{ kg / s}}{\pi[(5 \times 10^{-3})^2 / 4]} = 30,6 \text{ m / s}$$

$$W_n = m_n g = 0,1 \times 9,81 = 0,981 \text{ N}$$

$$W_w = m_w g = \rho (\text{Volume de controle}) g$$

$$= \rho \left[\frac{1}{12} \pi h (D_1^2 + D_2^2 + D_1 D_2) \right] g$$


$$W_w = 999 \times \frac{1}{12} \times \pi \times (30 \times 10^{-3}) \{ [(16)^2 + (5)^2 + (16 \times 5)] \} \times 10^{-6} \times 9,8 = 0,028 \text{ N}$$



► Logo,

$$F_A = \dot{m}(w_1 - w_2) + W_n + p_1 A_1 + W_w \quad (p_2 = 0)$$

$$F_A = 0,6 \times (3,0 - 30,6) + 0,98 + 464 \times 10^3 \times \frac{\pi(16 \times 10^3)^2}{4} + 0,028$$

$$F_A = -16,5 + 0,98 + 93,3 + 0,028$$

$$F_A = 77,8 N$$

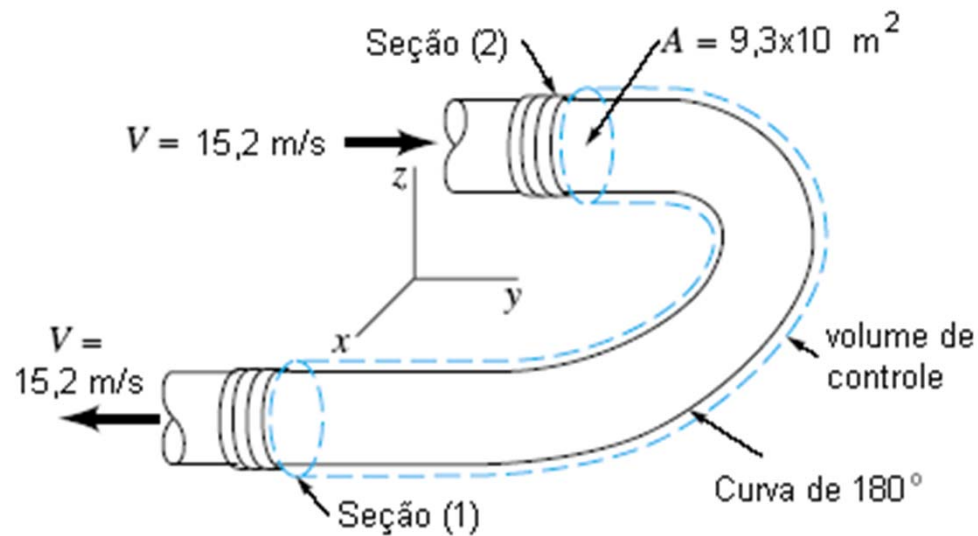


► Com $F_A > 0$, seu sentido é para cima (de acordo com o sistema de referência considerado).



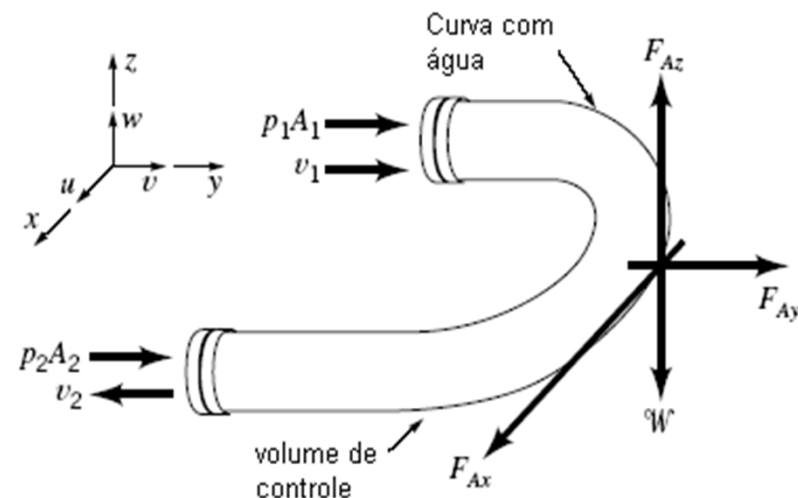
► Outros volumes de controle podem ser considerados na solução desse problema. Vejam páginas 131, 132 e 133 do Young.

3) Água escoia na curva mostrada na figura abaixo. A área da seção transversal da curva é constante e igual a $9,3 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. A velocidade é uniforme em todo o campo de escoamento e é igual a $15,2 \text{ m/s}$. A pressão absoluta nas seções de alimentação e descarga são, respectivamente, iguais a 207 kPa e 165 kPa . Determine os componentes da força necessária para ancorar a curva nas direções x e y .



Solução

- ▶ Vamos considerar o volume de controle mostrado na figura anterior (linha azul tracejada).
- ▶ A próxima figura mostra as forças horizontais e verticais que atuam no volume de controle.
- ▶ Força peso atua na vertical, portanto, não influencia na determinação da força horizontal de estabilização.



► **Aplicando a equação da quantidade de movimento,**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{Externas} \\ \text{vol. controle}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV = 0 \quad (\text{escoamento permanente})$$

$$\Rightarrow \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\substack{\text{Externas} \\ \text{vol. controle}}}$$

No sistema de coordenadas considerado (Fig. anterior)

$$\int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \begin{cases} \int_{SC} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_X = 0 \\ \int_{SC} v \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_Y = F_{Ay} + p_1 A_1 + p_2 A_2 - p_0 (A_1 + A_2) \end{cases}$$

$p_0 =$ pressão atmosférica.

► Considerando a figura anterior, verificamos que nas seções (1) e (2), o escoamento coincide com a direção y , por isso, $u = 0$. Não existe assim, fluxo na direção x , portanto, $F_x = 0$ (como escrito na equação anterior).

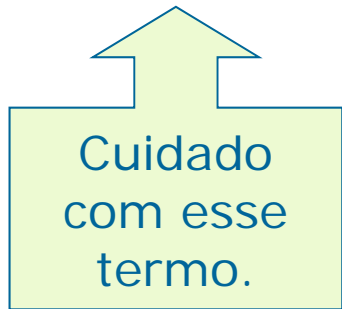
► A força para imobilizar o cano é a reação às forças em y feitas pela água e pressão.

$$\int_{SC} v \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_Y = F_{Ay} + p_1 A_1 + p_2 A_2 - p_0 (A_1 + A_2)$$

$$\int_{S1} v \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{S2} v \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_{Ay} + p_1 A_1 + p_2 A_2 - p_0 (A_1 + A_2)$$

► Na seção (1), $v = V_1$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -V_1$

► Na seção (2), $v = -V_2$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_2$



Cuidado com esse termo.



► Logo,

$$\int_{S_1} v\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}dA + \int_{S_2} v\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}dA = F_{Ay} + p_1A_1 + p_2A_2 - p_o(A_1 + A_2)$$

$$V_1\rho(-V_1)A_1 + (-V_2)\rho(V_2)A_2 = F_{Ay} + p_1A_1 + p_2A_2 - p_o(A_1 + A_2)$$



► Levando em conta que

$$A_1 = A_2$$

$$V_1 = V_2 = V \quad (\text{em módulo})$$

então,

$$\dot{m}_1 = \rho V_1 A_1 = \dot{m}_2 = \rho V_2 A_2 = \dot{m} = \rho VA. \quad \text{Daí,}$$

$$-2V\dot{m} = F_{Ay} + A(p_1 + p_2) - 2Ap_o$$

► **Substituindo os valores,**

$$\dot{m} = \rho VA = \left(999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(15,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \left(9,3 \times 10^{-3} \text{m}^2 \right) = 141,2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

► **Observando que as pressões p_1 e p_2 são absolutas, então, devemos considerar que.**

$$p_1 = p_o + p_{1R} \quad e \quad p_2 = p_o + p_{2R}$$

$$\text{Assim, } p_1 + p_2 = 2p_o + p_{1R} + p_{2R}$$

$$e \quad p_{1R} = p_1 - p_o = 207 \text{ kPa} - 101,3 \text{ kPa} = 107 \text{ kPa}$$

$$p_{2R} = p_2 - p_o = 165 \text{ kPa} - 101,3 \text{ kPa} = 65 \text{ kPa}$$

► **Assim,**

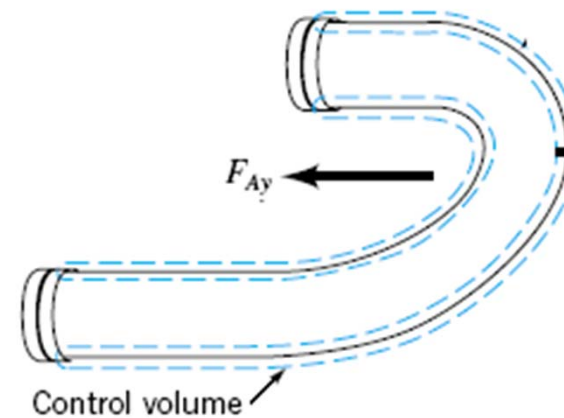
$$-2V\dot{m} = F_{Ay} + A(p_{1R} + p_{2R}) + 2Ap_o - 2Ap_o$$

$$F_{Ay} = -2V\dot{m} - A(p_{1R} + p_{2R})$$

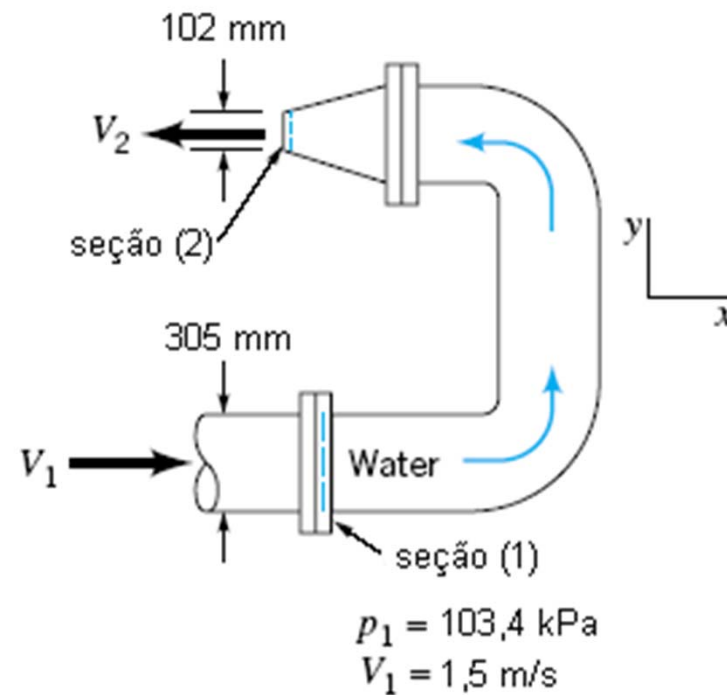
Portanto,

$$F_{Ay} = -2 \times 15,2 \times 141,2 - 9,3 \times 10^{-3} (107 \times 10^3 + 65 \times 10^3)$$

$$F_{Ay} = -5892,1 \text{ N}$$



4) Determine o módulo e o sentido das componentes nas direções x e y da força necessária para imobilizar o conjunto cotovelo – bocal esboçado na figura abaixo. O conjunto está montado na horizontal.



Solução

► De acordo com o texto e a figura, as seções de alimentação e descarga estão montadas na direção x . Por esse motivo, $v = 0$ e não existe fluxo da quantidade de movimento nesta direção, portanto, $F_y = 0$.

► Aplicando a equação da quantidade de movimento,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\text{Externas vol. controle}}$$

= 0,
escoamento
permanente.

$$\int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\text{Externas vol. controle}}$$

► As pressões dadas são relativas ($p_1 = 103,4$ kPa e $p_2 = 0$).

► Assim,

$$\int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \begin{cases} \int_{SC} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_X = F_{Ax} + p_1 A_1 + p_2 A_2 \\ \int_{SC} v \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_Y = 0 \end{cases}$$

$$\int_{S1} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{S2} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_{Ax} + p_1 A_1 + p_2 A_2$$

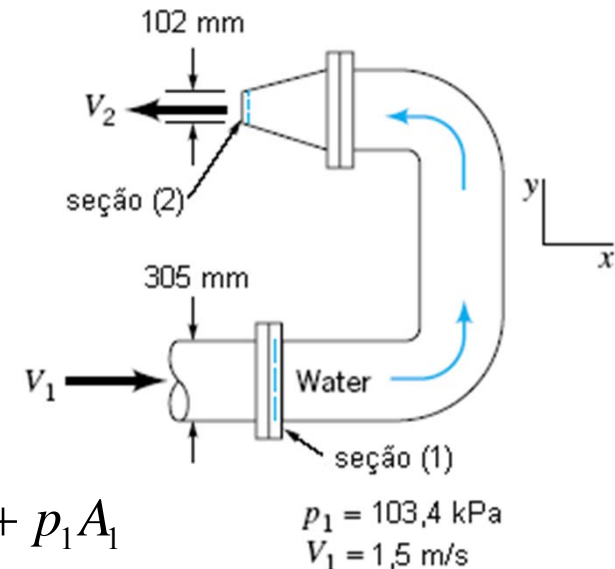
► Na seção (1), $u = V_1$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -V_1$

► Na seção (2), $u = -V_2$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_2$

► $p_2 = 0$ (descarga na atmosfera). Daí,

$$V_1 \rho (-V_1) A_1 + (-V_2) \rho V_2 A_2 = F_{Ax} + p_1 A_1$$

$$-V_1 (\rho V_1 A_1) - V_2 (\rho V_2 A_2) = F_{Ax} + p_1 A_1$$



$$-V_1 \dot{m}_1 - V_2 \dot{m}_2 = F_{Ax} + p_1 A_1$$

Como $\dot{m}_1 = \rho V_1 A_1 = \dot{m}_2 = \rho V_2 A_2 = \dot{m}$ (escoamento permanente), vem que

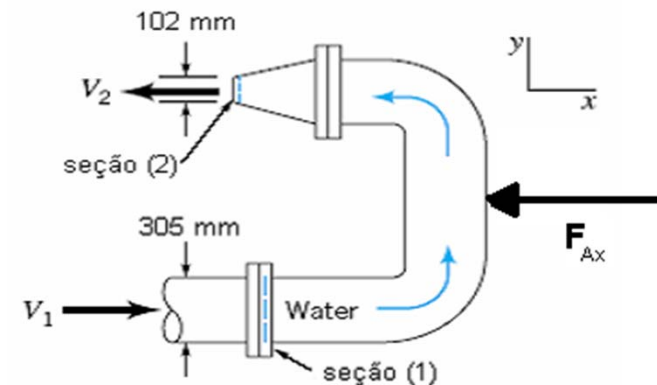
$$F_{Ax} = -\dot{m}(V_1 + V_2) - p_1 A_1$$

$$\dot{m} = \rho V_1 A_1 = 999 \times 1,5 \times \pi \times \left(\frac{0,305}{2} \right)^2 = 109,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

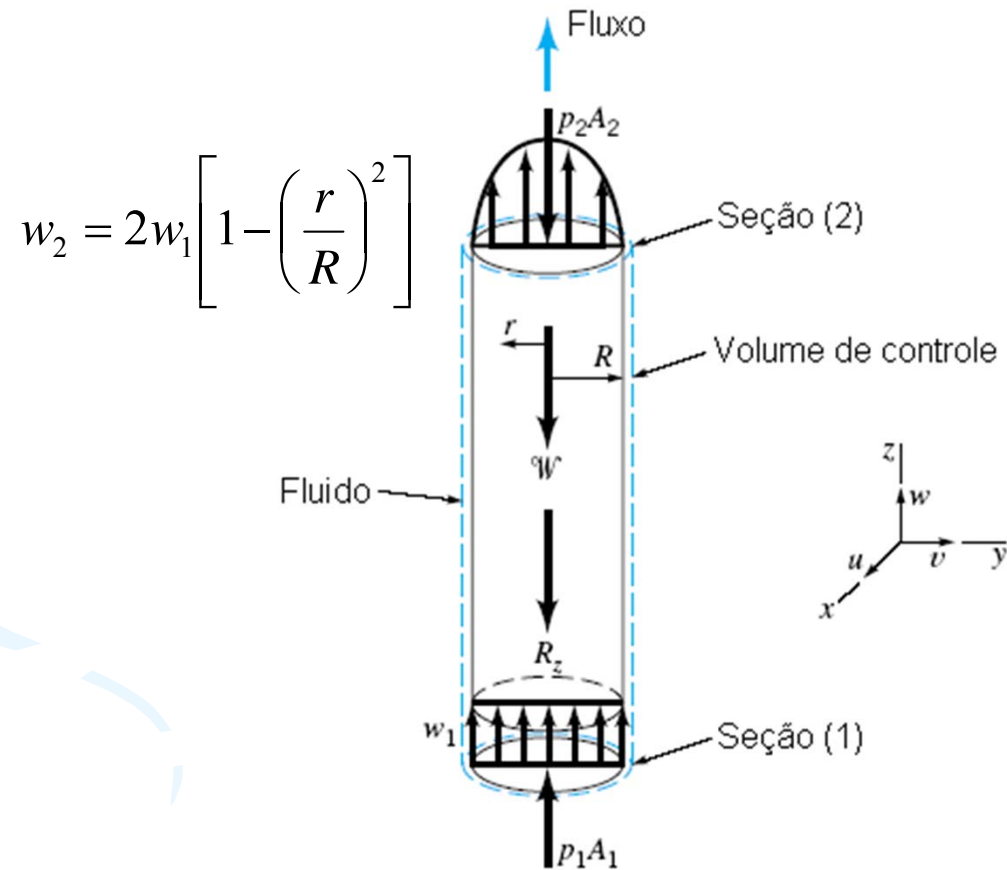
$$p_1 A_1 = 103,4 \times 10^3 \times \pi \times \left(\frac{0,305}{2} \right)^2 = 7588,54 \text{ N}$$

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{A_2} = \left(\frac{109,5}{\pi \times \left(\frac{0,102}{2} \right)^2} \right) = 13,4 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = 109,5 \times (1,5 + 13,41) - 7588,54 = -9190 \text{ N}$$



5) Determine uma expressão para queda de pressão que ocorre entre as seções (1) e (2) do escoamento mostrado na figura abaixo.



Solução

► R_z é a força que as paredes exercem sobre o fluido (ATRITO) e W é força peso da água no tubo.

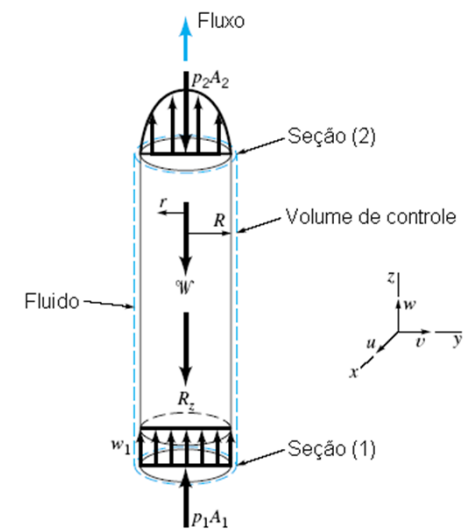
► Aplicando a equação da quantidade de movimento na direção z ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \mathbf{V} dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{Externas}$$

$= 0,$
escoamento permanente.

$$\int_{SC} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = F_z$$

$$\int_{S1} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{S2} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = p_1 A_1 - p_2 A_2 - W - R_z$$



► Na seção (1), $w = w_1$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -w_1$

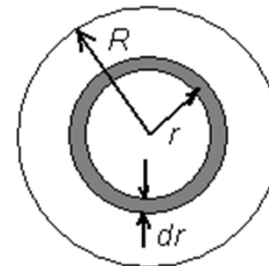
► Na seção (2), $w = w_2 = 2w_1 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = w_2$

► Assim,

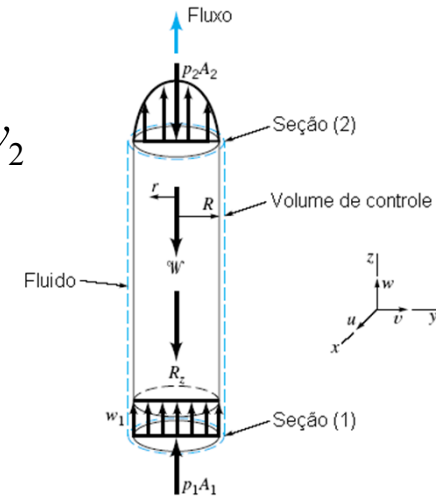
$$w_1 \rho (-w_1) A_1 + \int_{S_2} w_2 \rho w_2 dA = p_1 A_1 - p_2 A_2 - W - R_z$$

$$w_1 \rho (-w_1) A_1 + \int_{S_2} \rho (w_2)^2 dA = p_1 A_1 - p_2 A_2 - W - R_z$$

$$-w_1 \dot{m}_1 + \int_0^R \rho \left\{ 2w_1 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\}^2 2\pi r dr = p_1 A_1 - p_2 A_2 - W - R_z$$



$$\frac{2\pi r}{dA = 2\pi r dr} dr$$



► **Separadamente,**

$$\int_0^R \rho \left\{ 2w_1 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\}^2 2\pi r dr = 8\pi w_1^2 \rho \int \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^2 r dr = 4\pi w_1^2 \rho \frac{R^2}{3}$$

Separadamente,

$$\int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^2 r dr = \int_0^R \left(1 - 2\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} \right) r dr = \int_0^R \left(r - 2\frac{r^3}{R^2} + \frac{r^5}{R^4} \right) dr = \frac{R^2}{6}$$

Assim,

$$w_1 \rho (-w_1) A_1 + 4w_1^2 \pi \rho \frac{R^2}{3} = p_1 A_1 - p_2 A_2 - W - R_z$$

$$\text{Como } A_1 = A_2, \text{ vem que, } p_1 - p_2 = \frac{\rho w_1^2}{3} + \frac{W}{A_1} + \frac{R_z}{A_1}$$



► A expressão,

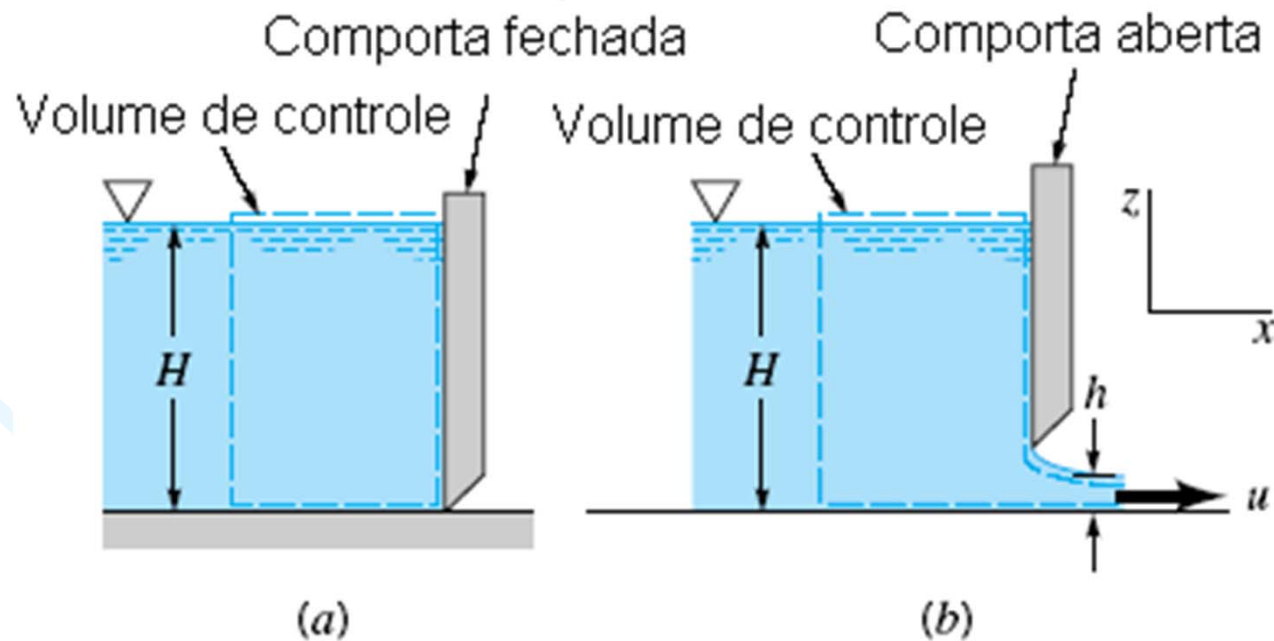
$$p_1 - p_2 = \frac{\rho w_1^2}{3} + \frac{W}{A_1} + \frac{R_z}{A_1}$$



Mostra que a variação de pressão ocorre devido a:

- 1. Variação da velocidade ao longo do escoamento.**
- 2. Peso do fluido (efeito hidrostático).**
- 3. Atrito com paredes.**

6) A comporta deslizante esquematizada na figura abaixo está instalada num canal que apresenta largura b . A força necessária para imobilizar a comporta é maior quando ela está fechada ou aberta?



Solução

- ▶ Para responder esta pergunta, calcularemos as reações das forças feitas pela água nestes dois casos.
- ▶ Aplicando a equação da quantidade de movimento, note que só teremos resultante na direção x.

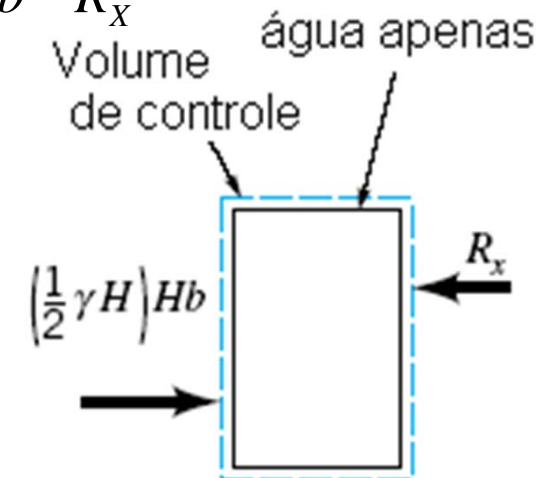
= 0,
escoamento permanente.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \mathbf{V} dV + \int_{SC} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum \mathbf{F}_{\text{Externas}}$$

$$\int_{SC} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \gamma \frac{H}{2} A - R_x = \gamma \frac{H}{2} Hb - R_x$$

$$\int_{SC} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{2} \gamma H^2 b - R_x$$

- ▶ R_x é a força feita pela comporta e $(\gamma HA/2) = (\gamma H^2 b / 2)$ é a força feita pela água sobre o vol. Controle.



► **Continuando,**

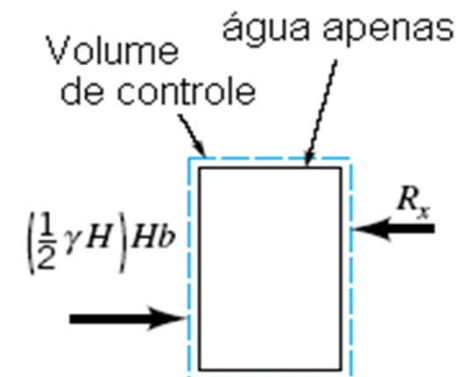
$$\int_{SC} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{2} \gamma H^2 b - R_x$$

Se a comporta estiver fechada, o primeiro membro da equação acima é nulo, porque não ocorre escoamento. Logo,

$$R_x = \frac{1}{2} \gamma H^2 b$$

$$R_x = \frac{1}{2} \times 9810 \times H^2 b = 4950 \times H^2 b$$

► **R_x é, em módulo, igual a força hidrostática da água.**

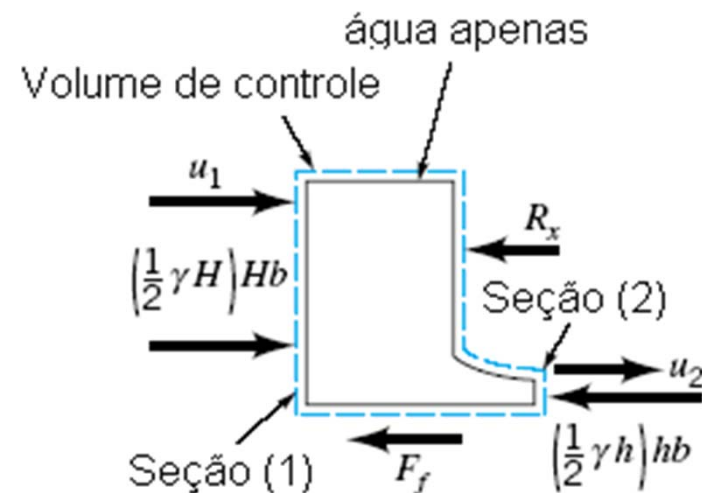


► Agora, vamos analisar o que ocorre com a comporta aberta. Neste caso, há fluxo, portanto,

$$\int_{SC} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \gamma \frac{H}{2} A_1 - \gamma \frac{h}{2} A_2 - R_x - F_f$$

$$\int_{SC} w \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{2} \gamma H^2 b - \frac{1}{2} \gamma h^2 b - R_x - F_f$$

► As duas primeiras parcelas do segundo membro correspondem as forças hidrostáticas nas seções (1) e (2), respectivamente. Veja figura ao lado.





► **Interpretando as parcelas**


$$\frac{1}{2} \gamma H A_1 = \frac{1}{2} \gamma H^2 b \text{ é a força hidrostática na seção (1)}$$

$$\frac{1}{2} \gamma h A_2 = \frac{1}{2} \gamma h^2 b \text{ é a força hidrostática na seção (2)}$$

R_x é força feita pela comporta

F_f é a força de atrito (tende a segurar a água)

Assim,


$$\int_{S_1} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{S_2} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{2} \gamma H^2 b - \frac{1}{2} \gamma h^2 b - R_x - F_f$$

▶ Na seção (1), $u = V_1$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -V_1$

▶ Na seção (2), $u = V_2$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_2$

Desta forma,

$$\int_{S_1} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{S_2} u \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{2} \gamma H^2 b - \frac{1}{2} \gamma h^2 b - R_x - F_f$$

$$V_1 \rho (-V_1) A_1 + V_2 \rho V_2 A_2 = \frac{1}{2} \gamma b (H^2 - h^2) - R_x - F_f$$

$$R_x = \frac{1}{2} \gamma b (H^2 - h^2) - F_f + \rho V_1^2 H b - \rho V_2^2 h b$$

É nulo Se V_1
puder ser
considerada
igual a 0

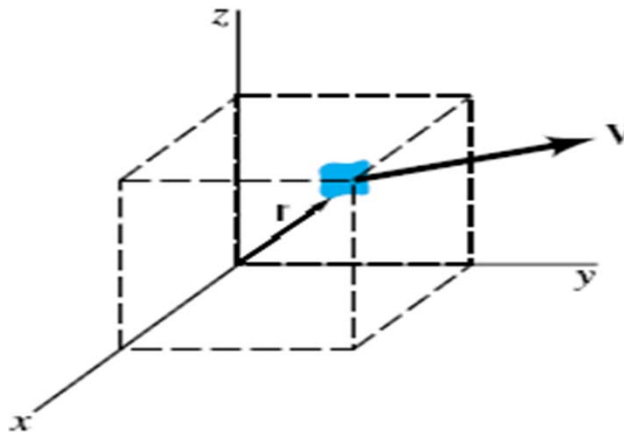
▶ Comparando as duas expressões encontradas para R_x

$$R_x = \frac{1}{2} \gamma H^2 b \quad e \quad R_x = \frac{1}{2} \gamma b (H^2 - h^2) - F_f + \rho V_1^2 H b - \rho V_2^2 h b$$

Verificamos que a força com a comporta aberta é menor.

5.2.3 Derivação da equação do Momento da quantidade de movimento

- ▶ Muitas vezes a força feita por um fluido gera um momento (torque) em relação a um dado eixo de uma estrutura. Como resultado esta estrutura pode apresentar um movimento de rotação em torno deste eixo.
- ▶ Para encontrarmos esse momento, vamos considerar uma partícula fluida de massa $\rho\delta V$ e um sistema de coordenadas (x, y, z) (figura). Como já vimos, a quantidade de movimento dessa partícula é $V\rho\delta V$, onde V é sua velocidade.





► **Aplicando a lei de movimento de Newton,**

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{V}\rho dV) = \delta \mathbf{F}_{Partícula}$$

dV é uma diferencial de volume



$\delta \mathbf{F}_{Partícula}$ é a resultante das forças externas que atuam sobre a partícula.

► **O momento (torque) sobre esta partícula é,**

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{r}\rho dV) = \delta \mathbf{M}_{Partícula}$$



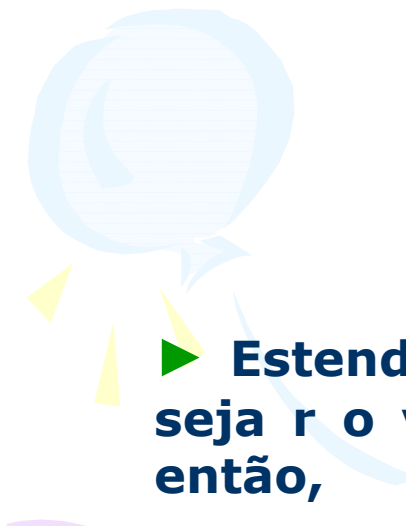
\mathbf{r} é o vetor posição da partícula fluida (figura anterior).




► Lembrando que,

$$\frac{D}{Dt}[(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho dV] = \frac{D\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{V}\rho dV + \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{V}}{dt} \rho dV$$

$$\text{mas, } \frac{D\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{V}\rho dV = \mathbf{V} \times \mathbf{V}\rho dV = 0. \text{ Logo,}$$


$$\frac{D}{Dt}[(\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho dV] = \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{V}}{dt} \rho dV = \mathbf{r} \times \delta \mathbf{F}_{\text{Partícula}}$$

► Estendendo a análise a todas as partículas do sistema, e seja \mathbf{r} o vetor posição da partícula fluida (figura anterior), então,


$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\rho dV = \sum (\mathbf{r} \times \delta \mathbf{F}_{\text{Partícula}})_{SIS}$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho dV = \sum (\mathbf{r} \times \delta \mathbf{F}_{Partícula})_{SIS} \quad (*)$$

Taxa de variação temporal do momento da quantidade de movimento do sistema .

Soma dos torques externos que atuam no sistema

► **Da mesma forma que na seção anterior, consideraremos que quando o sistema e o volume de controle são coincidentes, as forças externas que atuam sobre ambos são iguais. Assim,**

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_{SIS} &= \sum \mathbf{F}_{VC} \\ \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{SIS}) &= \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{VC}) \quad (2*) \end{aligned}$$

► **Aplicando o teorema de Reynolds,**

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} \mathbf{V} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

$$\mathbf{r} \times \frac{D}{Dt} \int_{SIS} \mathbf{V} \rho dV = \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \mathbf{V} \rho dV + \mathbf{r} \times \int_{SC} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho dV + \int_{SC} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

Substituindo os resultados () e (2*), encontramos,*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho dV + \int_{SC} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{VC}$$

Esta é a expressão para o momento da quantidade de movimento.

5.2.4 Aplicações da equação do Momento da quantidade de movimento

► Consideraremos as seguintes hipóteses:

- Escoamentos unidimensionais => em distribuições uniformes de velocidade.

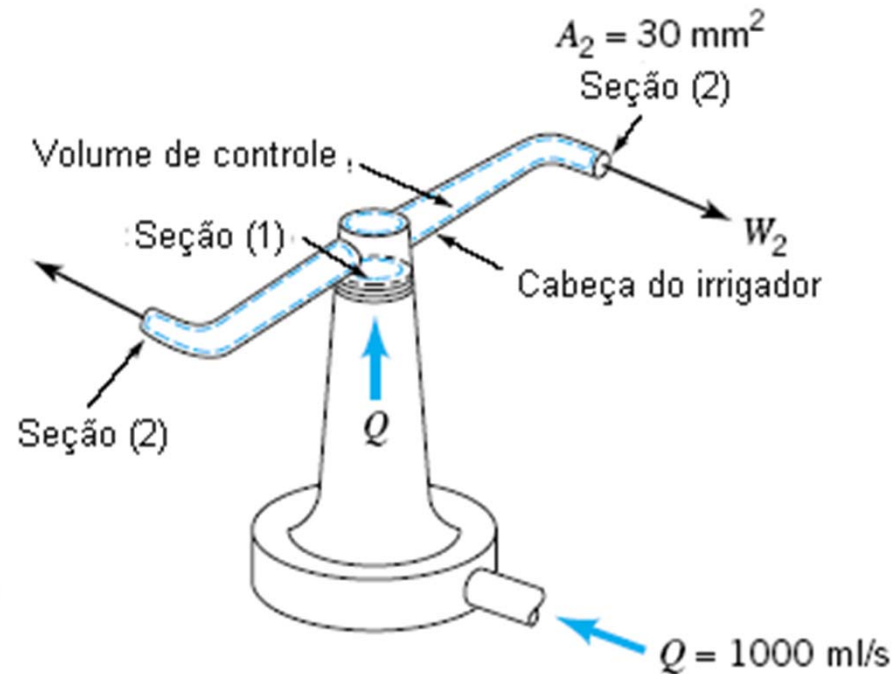
- Escoamentos permanentes, $\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} w \rho dV = 0$

- Trabalharemos sempre com a componente axial da equação,

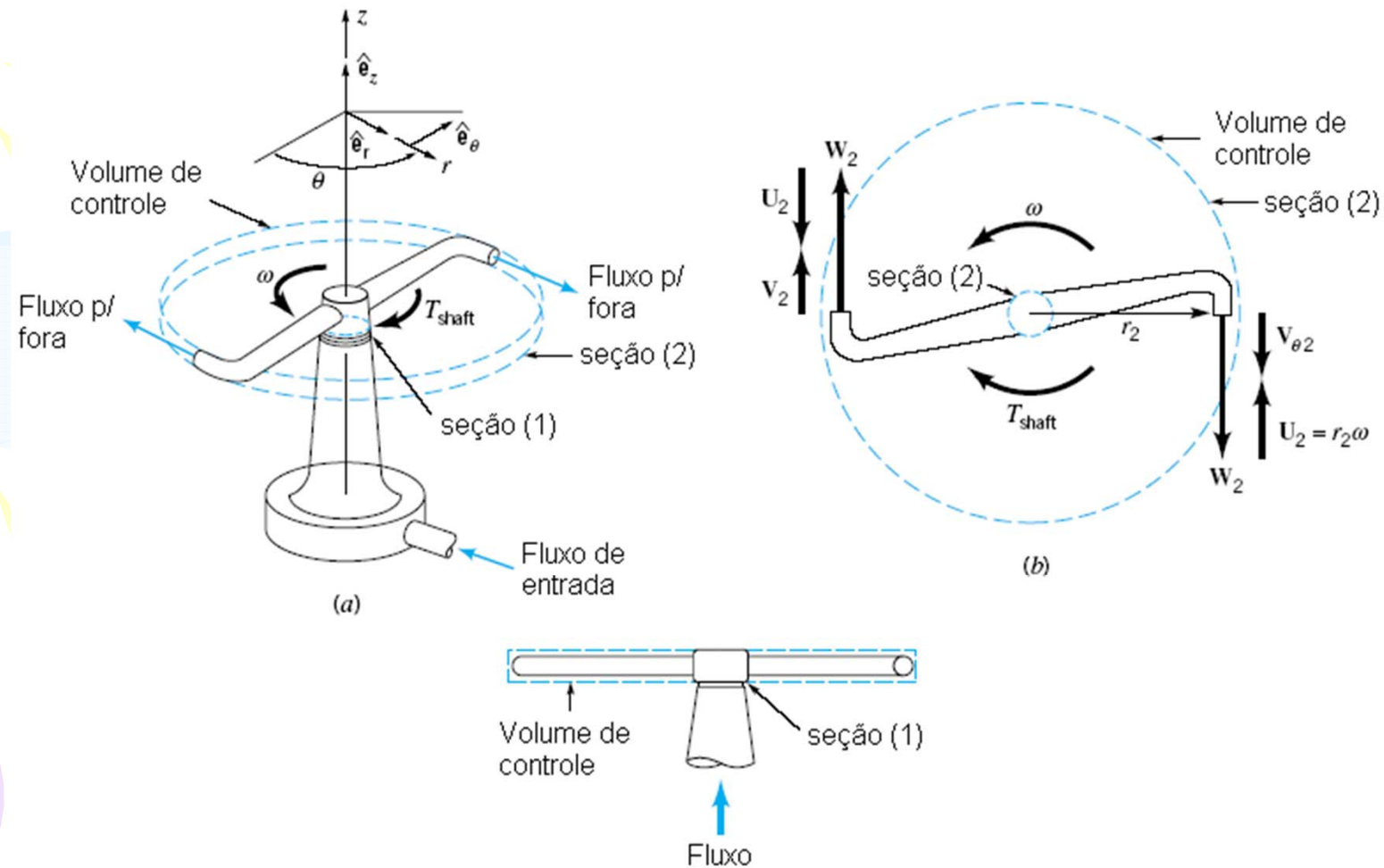
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho dV + \int_{sc} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{vc}$$

Desta forma, consideraremos sempre a mesma direção do eixo de rotação.

► Para aplicar a equação do momento da quantidade de movimento e testar estas hipóteses, consideremos o exemplo do irrigador de jardim.

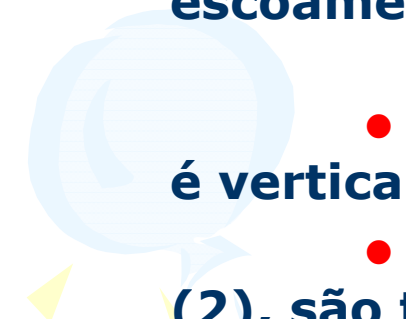
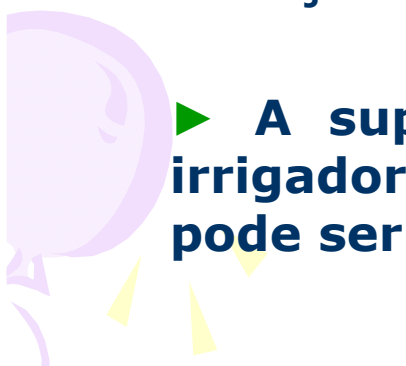


► Consideraremos também a figura a seguir





Análise

- ▶ **O escoamento da água cria um torque no braço do irrigador e o faz girar.**
 - ▶ **Existe modificações na direção da velocidade do escoamento do braço do irrigador, pois:**
 - **O escoamento na seção de alimentação, seção (1), é vertical.**
 - **Os escoamentos nas seções de descargas, seções (2), são tangenciais.**
 - ▶ **O volume de controle, em forma de disco, contém a cabeça do irrigador parado ou em movimento.**
 - ▶ **A superfície de controle corta a base da cabeça do irrigador de modo que o torque que resiste ao movimento pode ser facilmente calculado.**
- 
- 

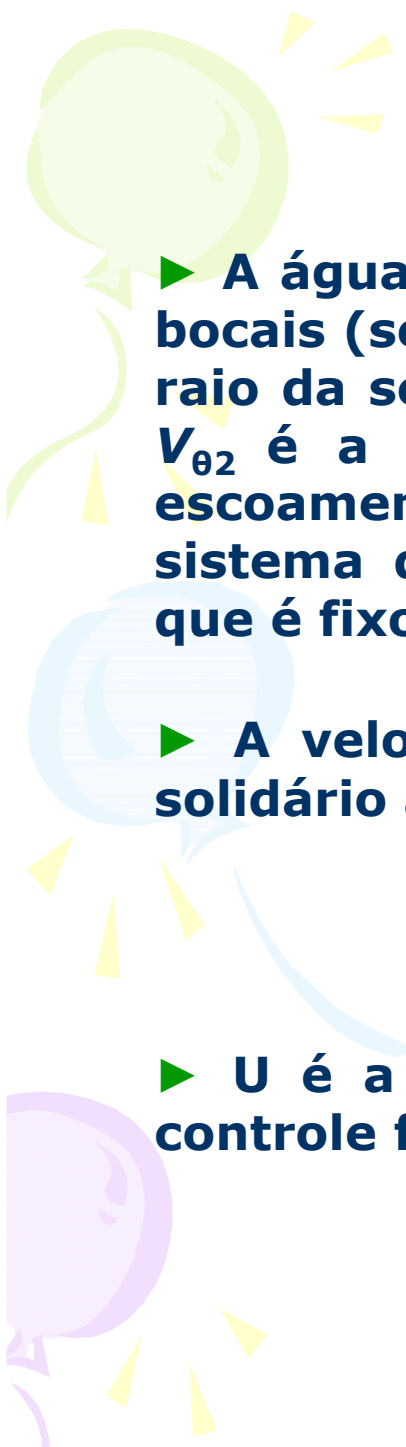
▶ Quando a cabeça do irrigador está girando, o campo de escoamento no volume de controle estacionário é cíclico e transitório, **mas o escoamento é permanente em média.**

▶ Voltando a equação:

$$\int_{SC} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_{VC}$$

O primeiro termo só pode ser nulo onde existe escoamento cruzando a superfície de controle. Em qualquer outra região da superfície de controle este termo será nulo porque $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$.

▶ A água entra axialmente no braço do irrigador pela seção (1). Nesta região da superfície de controle a componente de $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ na direção do eixo de rotação é nula, porque $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ é perpendicular ao eixo de rotação. Desta forma não existe fluxo de momento de quantidade de movimento na seção (1).

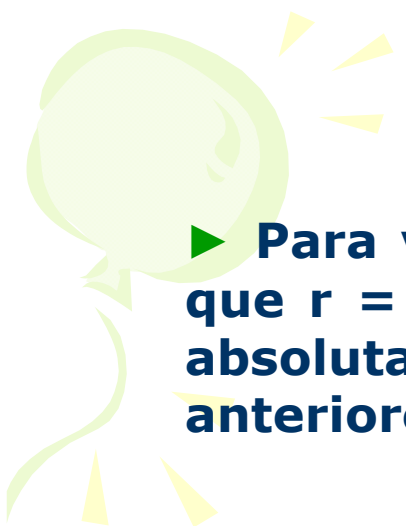


► A água é descarregada do volume de controle pelos dois bocais (seções 2). Nestas seções, $|r \times V| = r_2 V_{\theta 2}$, onde r_2 é o raio da seção (2) medido em relação ao eixo de rotação, e $V_{\theta 2}$ é a componente tangencial do vetor velocidade do escoamento nos bocais de descarga medida em relação ao sistema de coordenadas solidário ao volume de controle, que é fixo.

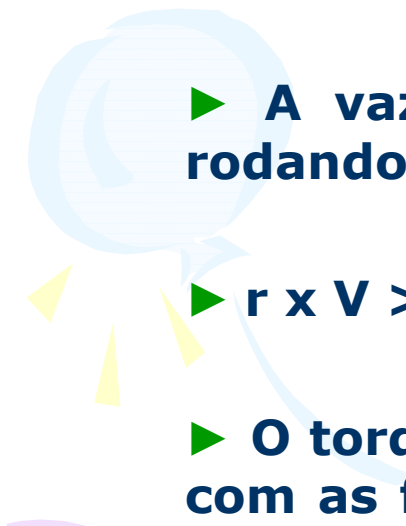

► A velocidade do escoamento vista por um observador solidário ao bocal é:

$$V = W + U, \quad W = V - U \quad (U = V_{VC})$$

► U é a velocidade do bocal em relação à superfície de controle fixa.

- 
- ▶ Para verificação da componente axial de $\mathbf{r} \times \mathbf{V}$ é preciso que $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r$ e que a componente tangencial da velocidade absoluta seja $\mathbf{V} = V_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$. Assim, para o irrigador das figuras anteriores,

$$\left[\int_{SC} (\mathbf{r} \times \mathbf{V}) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \right]_{Axial} = (-r_2 V_{\theta 2}) (\dot{m})$$

- 
- ▶ A vazão em massa é a mesma se o irrigador estiver rodando ou em repouso.
 - ▶ $\mathbf{r} \times \mathbf{V} > 0$ se $\mathbf{V} = V_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$ e \mathbf{U} tiverem o mesmo sentido.
 - ▶ O torque líquido em relação ao eixo de rotação associado com as forças normais que atuam no volume de controle é muito pequeno.
 - ▶ O torque líquido devido às forças tangenciais também é desprezível para o volume de controle considerado.
- 




► Levando em conta as análises anteriores,

$$\left[\sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V})_{\text{Conteúdo do vol. controle}} \right]_{\text{Axial}} = T_{\text{eixo}}$$



► $T_{\text{eixo}} > 0 \Rightarrow$ que T_{eixo} atua no mesmo sentido de rotação do irrigador (regra da mão direita).



► A potência no eixo, \dot{W}_{eixo} , associada ao torque no eixo, T_{eixo} é

$$\dot{W}_{eixo} = T_{eixo} \omega = -r_2 V_{\theta 2} \dot{m} \omega$$

Como $r_2 \omega = U$ é a velocidade dos bocais,

$$\dot{W}_{eixo} = -UV_{\theta 2} \dot{m}$$



► O trabalho por unidade de massa é definido por,

$$W_{eixo} = \frac{\dot{W}_{eixo}}{\dot{m}} = -UV_{\theta 2}$$



► Se $W_{eixo} > 0$ então é o volume de controle que realiza trabalho. Isto é, o fluido realiza trabalho no rotor.

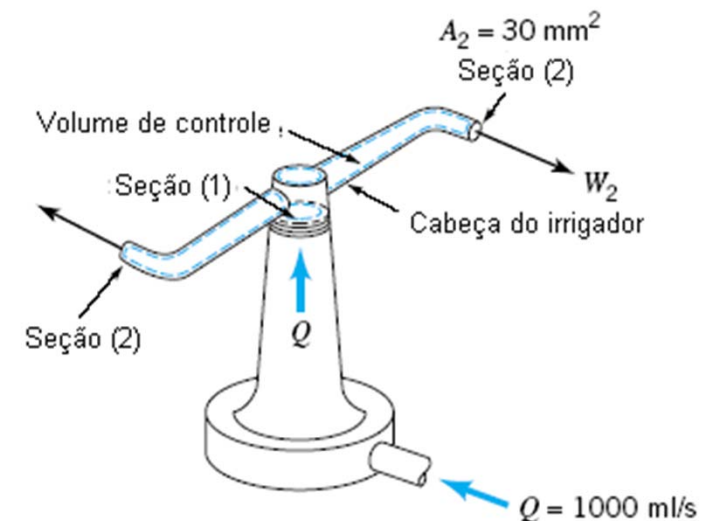
Exercícios

1) A vazão em água na seção de alimentação do braço do irrigador mostrado na figura abaixo é igual a 1000 ml/s. As áreas das seções transversais de descarga são 30 mm² e o escoamento deixa esses bocais tangencialmente. A distância entre esses bocais e o eixo de rotação é, r_2 , 200 mm.

a) Determine o torque necessário para imobilizar o irrigador.

b) Determine o torque resistivo necessário para que o irrigador gire a 500 rpm.

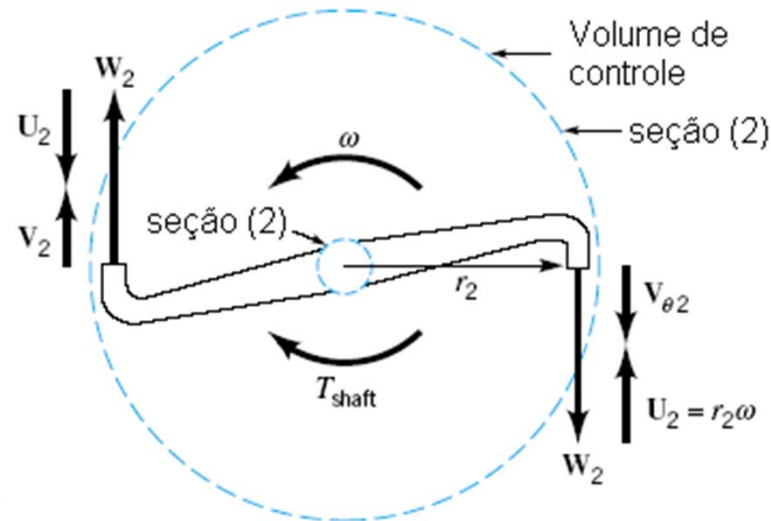
c) Determine a velocidade do irrigador se não existir qualquer resistência ao movimento do braço.



Solução

a) Torque necessário para imobilizar o irrigador.

A figura abaixo mostra as velocidades nas seções de alimentação e descarga do volume de controle.



► Aplicando a equação do torque: $T_{eixo} = -r_2 V_{\theta 2} \dot{m}$

► Levando em conta que se o volume de controle for fixo e indeformável e o escoamento nas seções de descarga seja tangencial a este, em cada bocal,

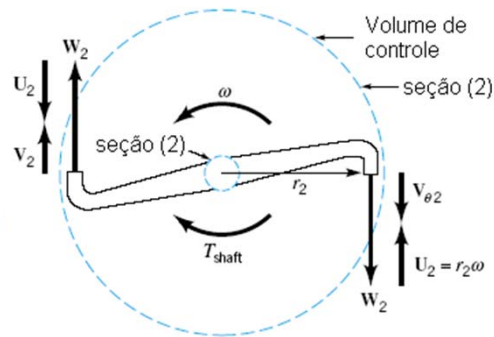
$$\underbrace{V_{\theta 2} = V_2 = W_2}_{\text{}} = \frac{Q}{A_2} = \frac{1000 \times 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{s}}{2 \times 30 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 16,7 \text{ m} / \text{s}$$

$$T_{Eixo} = -r_2 V_2 \dot{m} = -(0,2 \text{ m})(16,7 \text{ m} / \text{s})(0,001 \text{ m}^3 / \text{s})$$

$$T_{Eixo} = -3,34 \text{ N m}$$

Quando o irrigador está em repouso.

b) Torque resistivo necessário para que o irrigador gire a 500 rpm.



$$V_2 = W_2 + U_2 \Rightarrow V_2 = W_2 - U_2 \quad (U_2 = V_{VC})$$

$$W_2 = 16,7 \text{ m/s}$$

$$U_2 = \omega r_2 = (500 \text{ rpm}) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} \right) (0,2) = 10,47 \text{ m/s}$$

$$V_2 = W_2 - U_2 = 16,7 - 10,7 \cong 6,2 \text{ m/s}$$

► **Note que o torque resistente é menor que o torque necessário para manter o irrigador imobilizado.**

Assim,

$$T_{Eixo} = -r_2 V_{2\theta} \dot{m} = -(0,2 \text{ m})(6,2 \text{ m/s})(0,001 \text{ m}^3/\text{s})$$

$$T_{Eixo} = -1,24 \text{ Nm}$$

c) Velocidade do irrigador se não existir qualquer resistência ao movimento do braço.

$$T_{Eixo} = -r_2 V_{2\theta} \dot{m}$$

$$V_{2\theta} = V_2$$

$$V_2 = W_2 - r\omega$$

$$\Rightarrow T_{Eixo} = -r_2 V_{\theta 2} \dot{m} = -r_2 (W_2 - r\omega) \dot{m}$$

Supondo que o torque resistente seja nulo,

$$-r_2 (W_2 - r\omega) \dot{m} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{W_2}{r_2} = \frac{16,7}{0,2} = 83,5 \text{ rad} / \text{s}$$

ou

$$\omega = \frac{83,3 \times 60}{2\pi} = 797 \text{ rpm}$$

► Agora, vamos analisar o resultado da aplicação da equação do momento da quantidade de movimento a um escoamento unidimensional numa máquina rotativa. Isto é,

$$T_{Eixo} = (-\dot{m}_e)(\pm r_e V_{\theta e}) + (\dot{m}_s)(\pm r_s V_{\theta s})$$

► Discutindo os sinais,

- O sinal negativo no termo vazão em massa na seção de alimentação, \dot{m}_e , vem do produto escalar $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} < 0$.

- Os sinais no termo $r_e V_{\theta e}$ depende do sentido do produto vetorial $(\mathbf{r} \times \mathbf{V})_{axial}$. Uma maneira de determinar esse sinal é comparar o sentido de $V_{\theta e}$ com a velocidade da paleta do bocal, U .

- $r_e V_{\theta e} > 0$ se V_{θ} e U apresentam o mesmo sentido.

- $r_e V_{\theta e} < 0$ se V_{θ} e U apresentam sentidos opostos.

- O sentido do torque, T_{Eixo} , é positivo se tiver o mesmo sentido de ω (regra da mão direita).



► A potência no eixo, \dot{W}_{Eixo} , está relacionada com o T_{Eixo} por

$$\dot{W}_{Eixo} = T_{Eixo} \omega$$

► Considerando, $T_{Eixo} > 0$ e a equação

$$T_{Eixo} = (-\dot{m}_e)(\pm r_e V_{\theta e}) + (\dot{m}_s)(\pm r_s V_{\theta s})$$

vem que,


$$\dot{W}_{Eixo} = (-\dot{m}_e)(\pm r_e \omega V_{\theta e}) + (\dot{m}_s)(\pm r_s \omega V_{\theta s})$$

como $U = r\omega$


$$\dot{W}_{Eixo} = (-\dot{m}_e)(\pm U_e V_{\theta e}) + (\dot{m}_s)(\pm U_s V_{\theta s})$$

► **Discutindo os sinais da equação**

$$\dot{W}_{Eixo} = (-\dot{m}_e)(\pm U_e V_{\theta e}) + (\dot{m}_s)(\pm U_s V_{\theta s})$$

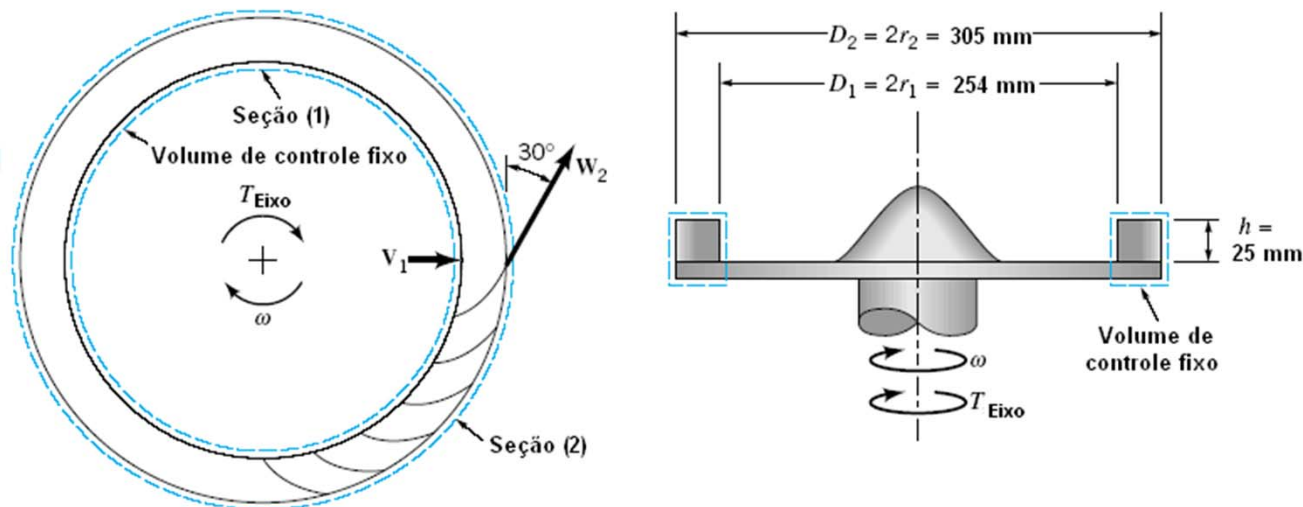
- UV_{θ} se U e V_{θ} apresentam o mesmo sentido.
- $T_{Eixo} > 0$ hipótese.
- $\dot{W}_{Eixo} > 0$ quando a potência é consumida no volume de controle, por exemplo, uma bomba.
- $\dot{W}_{Eixo} < 0$ quando a potência é produzida no volume de controle, por exemplo, uma turbina.

► **Trabalho do eixo por unidade de massa (lembrando que a conservação da massa estabelece que $\dot{m} = \dot{m}_e = \dot{m}_s$) é**

$$w_{Eixo} = -\dot{m}(\pm U_e V_{\theta e}) + (\pm U_s V_{\theta s})$$

Exercício

A figura a seguir mostra o esboço de um ventilador que apresenta diâmetros externo e interno de 305 mm e 254 mm, respectivamente. A altura das paletas do rotor é de 25 mm. O regime de escoamento é permanente em média e a vazão em volume média é $0,110 \text{ m}^3/\text{s}$. Note que a velocidade absoluta do ar na seção de alimentação do rotor, V_1 , é radial e que o ângulo dentro a direção do escoamento do rotor e a direção radial é de 30° . Estime a potência necessária para opera o ventilado sabendo que a rotação é de 1725 rpm.



Solução

- ▶ O volume de controle considerado é fixo e indeformável e contém as paletas do ventilador e o fluido contido no rotor.
- ▶ Em média o escoamento é permanente, apesar de cíclico.
- ▶ O único torque a considerar é o torque do eixo do motor, T_{Eixo} . Este é produzido pelo motor acoplado ao ventilador.
- ▶ Consideremos também perfis de velocidades uniformes nas seções de descarga.
- ▶ Aplicando a equação do momento da quantidade de movimento para um escoamento unidimensional numa máquina rotativa,

$$\dot{w}_{eixo} = (-\dot{m}_1)(\pm U_1 V_{\theta 1}) + (\dot{m}_2)(\pm U_2 V_{\theta 2}) = (\dot{m}_2)(\pm U_2 V_{\theta 2})$$

- ▶ O primeiro termo do segundo membro é nulo, já que V_1 é radial ($V_{\theta 1} = 0$).

Continuando...

$$\dot{w}_{eixo} = (-\dot{m}_1)(\pm U_1 V_{\theta 1}) + (\dot{m}_2)(\pm U_2 V_{\theta 2})$$

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho Q = 1,23 \times 0,0110 = 0,135 \text{ kg / s}$$

$$U_2 = r\omega = \frac{0,305}{2} \frac{(1725)(2\pi)}{(60)} = 27,5 \text{ m / s}$$

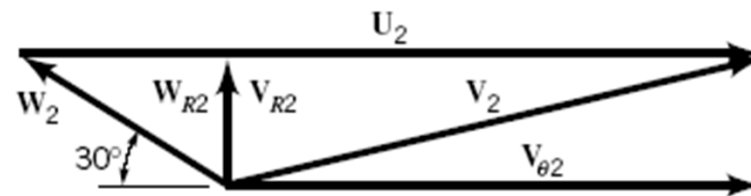
$$V_{\theta 2} = ?$$

Mas, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{W}_2 + \mathbf{U}_2$

De acordo com o triângulo de velocidades ao lado,

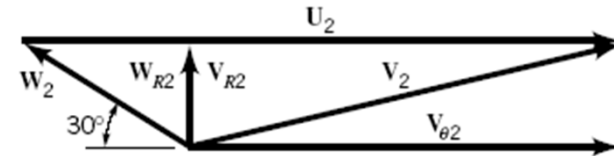
$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos(30^\circ)$$

$$\text{e } W_2 = ?$$



O triângulo de velocidades mostra que

$$V_{R2} = W_2 \cos(30^\circ)$$



Onde V_{R2} é a componente radial dos vetores W_2 e V_2 . Daí,

$$\dot{m} = \rho A_2 V_{R2} = \rho (2\pi r_2 h) V_{R2}$$

$$\text{Assim, } W_2 = \frac{\dot{m}}{\rho (2\pi r_2 h) \cos(30^\circ)} = \frac{0,135}{(1,23)(2\pi)(0,1525)(0,025)\cos(30^\circ)}$$

$$W_2 = 9,16 \text{ m/s}$$

Agora, podemos calcular $V_{\theta 2}$

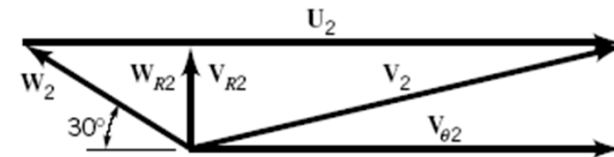
$$V_{\theta 2} = U_2 - W_2 \cos(30^\circ) = 27,5 - 9,16(\sqrt{3}/2)$$

$$V_{\theta 2} = 19,6 \text{ m/s}$$

Voltando a equação (1)

$$\dot{W}_{eixo} = (\dot{m}_2)(\pm U_2 V_{\theta 2})$$

$$\dot{W}_{eixo} = (0,135)(27,5 \times 19,6) = 72,8 W$$



- ▶ $U_2 V_{\theta 2} > 0$, já que os dois vetores apresentam o mesmo sentido.
- ▶ $72,8 W$ é a potência necessária para acionar o eixo do rotor nas condições estabelecidas.
- ▶ Toda potência no eixo só será transferida ao escoamento se todos os processos de transferência de energia forem ideais no ventilador. Mas devido ao atrito apenas uma parte da potência será de fato utilizada.
- ▶ A quantidade de energia transferida depende da eficiência das pás.

5.3 Primeira Lei da Termodinâmica – Equação da Energia.

5.3.1 Derivação da Equação da Energia

A primeira lei da termodinâmica estabelece que

Taxa de variação temporal da energia total do sistema

=

Taxa líquida de transferência de Calor para o sistema

+

Taxa de realização de trabalho (potência transferida para o sistema)

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} e \rho dV = \left(\sum \dot{Q}_e - \sum \dot{Q}_s \right)_{SIS} + \left(\sum \dot{W}_e - \sum \dot{W}_s \right)_{SIS}$$

ou

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} e \rho dV = \left(\sum \dot{Q}_{líq.e} + \sum \dot{W}_{líq.e} \right)_{SIS}$$

► Na equação,

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} e \rho dV = \left(\sum \dot{Q}_{líq.e} + \sum \dot{W}_{líq.e} \right)_{SIS} \quad (*)$$

• e é a energia total por unidade de massa. Está relacionada com a energia interna, u , com a energia cinética por unidade de massa, $V^2/2$, e com a energia potencial por unidade de massa, gz . Isto é,

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

• $\dot{Q}_{líq.e}$ = taxa líquida de transferência de calor:

$\dot{Q}_{líq.e} > 0$ se a transferência é do meio p/ o sistema.

$\dot{Q}_{líq.e} < 0$ se a transferência é do sistema p/ meio.

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} e \rho dV = \left(\sum \dot{Q}_{líq.e} + \sum \dot{W}_{líq.e} \right)_{SIS}$$

- $\dot{W}_{líq.e}$ = taxa líquida de transferência de trabalho (potência):

$\dot{W}_{líq.e} > 0$ se é realizado pelo meio sobre o sistema.

$\dot{W}_{líq.e} < 0$ se é realizado pelo sistema sobre o meio.

- ▶ Agora, considerando um volume de controle coincidente com o sistema, num dado instante, então,

$$\left(\dot{Q}_{líq.e} + \dot{W}_{líq.e} \right)_{SIS} = \left(\dot{Q}_{líq.e} + \dot{W}_{líq.e} \right)_{Vol. controle coincidente} \quad (2^*)$$

Situações Práticas de Engenharia

- ▶ Muitos processos práticos em engenharia podem ser considerados adiabáticos, assim,

$$\sum \dot{Q}_e - \sum \dot{Q}_s = 0$$

- ▶ Em muitas situações, o trabalho é transferido para o volume de controle, através da sup. de controle por um eixo móvel (turbinas, ventiladores, bombas, hélices, motores de combustão interna, compressores,...), dessa forma,

- Trabalho $W = \mathbf{F} \bullet \mathbf{X}$

- Potência $\dot{W} = \mathbf{F} \bullet \mathbf{V}$ (nesses dispositivos, $V = \omega r$)

- Logo, $\dot{W}_{eixo} = \mathbf{F} \bullet \omega \mathbf{r} = T_{eixo} \omega$ (T_{eixo} = torque que provoca rotação)

- ▶ Se há vários eixos, $\dot{W}_{eixo,líq.} = \sum \dot{W}_{eixo,e} - \sum \dot{W}_{eixo,s}$ (5*)

▶ A transferência de trabalho também pode ocorrer quando uma força associada com a tensão normal do fluido é deslocada.

▶ Nesses casos, as tensões normais, σ , no fluido são iguais ao negativo da pressão,

$$\sigma = -p$$

▶ A tensão associada com a tensão normal é,

$$\delta \dot{W}_{Tensão\ normal} = \delta \mathbf{F}_{Tensão\ normal} \bullet \mathbf{V}$$

Onde \mathbf{V} é a velocidade da partícula fluida.

▶ Se a força devida a tensão normal for expressão como o produto da pressão local pela área da partícula, $n\delta A$, então,

$$\delta \dot{W}_{Tensão\ normal} = \sigma \mathbf{V} \bullet \mathbf{n} \delta A = -p \mathbf{V} \bullet \mathbf{n} \delta A$$



► Assim, para todas as partículas situadas na superfície de controle,

$$\delta \dot{W}_{Tensão\ normal} = \int_{SC} \sigma \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{SC} p \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \quad (6^*)$$



• Na superfície de controle,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \delta_{Tensão\ normal} = 0$$

• Na região do tubo onde há escoamento,

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \neq 0 \Rightarrow \delta_{Tensão\ normal} \neq 0$$

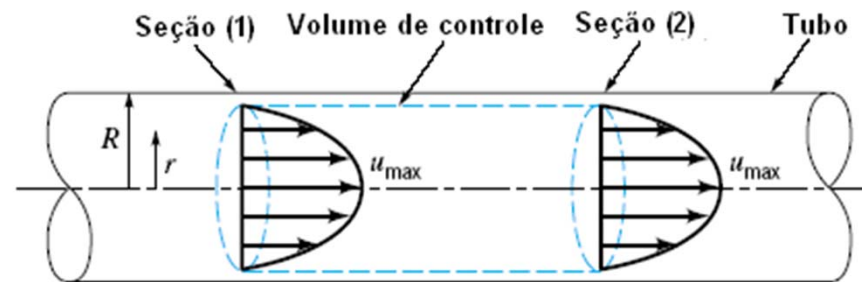
▶ O trabalho de rotação de um eixo sobre uma superfície de controle é transferido pelas tensões de cisalhamento do material do eixo.

▶ Para uma partícula fluida a potência associada a força tangencial é,

$$\delta \dot{W}_{\text{Tensão tangencial}} = \delta \mathbf{F}_{\text{Tensão tangencial}} \bullet \mathbf{V}$$

• Na superfície interna do tubo da figura a seguir (sup. controle), $\mathbf{V} = 0 \Rightarrow \delta_{\text{Tensão tangencial}} = 0$

• Nas demais regiões $\mathbf{V} \neq 0 \Rightarrow \delta_{\text{Tensão tangencial}} \neq 0$



$$u_1 = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$u_2 = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

▶ A primeira lei da termodinâmica para o conteúdo de controle, é obtida combinando as equações (4*), (5*) e (6*),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} e \rho dV + \int_{sc} e \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{Q}_{liq.e} + \dot{W}_{liq.e} - \int_{sc} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

▶ Aplicando a definição de energia total, $e = u + \frac{V^2}{2} + gz$

▶ Obtemos a definição de energia total,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} e \rho dV + \int_{sc} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{Q}_{liq.e} + \dot{W}_{liq.e}$$

5.3.2 Aplicação da Equação da Energia

▶ O termo $\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} e \rho dV$ representa a taxa de variação temporal da energia total do volume de controle. É nulo se o escoamento for permanente.

▶ O termo $\int_{sc} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$ é diferente de zero quando $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ também for diferente de zero.

▶ Integrando a última equação, considerando que os termos u , p/ρ , $V^2/2$ e gz sejam constantes nas seções de alimentação e descarga,

$$\int_{sc} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}_s - \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}_s$$

► Aplicando o teorema de Reynolds considerando o parâmetro $b = e$ (energia total por unidade de massa) e para um volume de controle fixo e indeformável,

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{SIS} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} e \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3^*)$$

Taxa de variação temporal da energia total do sistema .

Taxa de variação temporal da energia total do vol. de controle

Fluxo líquido de energia total na superfície do controle



► **Combinando as equações (*), (2*) e (3*), obtemos,**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} e\rho dV + \int_{SC} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \left(\dot{Q}_{líq.e} + \dot{W}_{líq.e} \right)_{Vol. controle coincidente} \quad (4^*)$$

► **A equação**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} e \rho dV + \int_{sc} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{Q}_{liq.e} + \dot{W}_{liq.e}$$

Pode ser simplificada levando em conta que,

$$\int_{sc} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}_s - \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}_E$$

E, como vimos anteriormente,

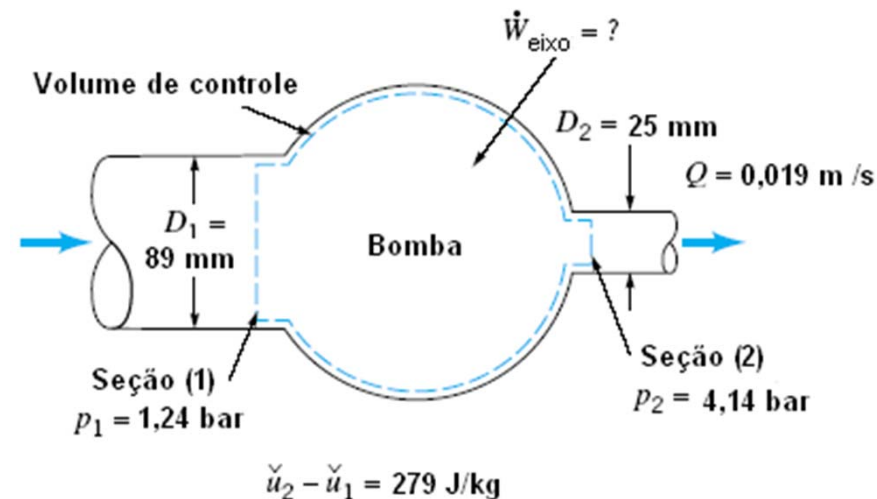
$$\sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0$$

Obtemos,

$$\dot{m} \left[u_s - u_e + \left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] = \dot{Q}_{liq.e} + \dot{W}_{liq.e}$$

Exercícios

1) A figura abaixo mostra um esquema de bomba d'água que apresenta uma vazão, em regime permanente, igual a $0,019 \text{ m}^3/\text{s}$. A pressão na seção (1) da bomba – seção de alimentação – é $1,24 \text{ bar}$ e o diâmetro de 89 mm . A seção (2) – seção de descarga - tem diâmetro de 25 mm e a pressão neste local é $4,14 \text{ bar}$. A elevação entre os centros das seções (1) e (2) é nula e o aumento de energia interna específica da água associado ao aumento de temperatura do fluido, $u_2 - u_1$, é igual a 279 J/kg . Determine a potência necessária para operar a bomba admitindo que esta opere de modo adiabático.



Solução

- Consideremos a equação

$$\dot{m} \left[u_s - u_e + \left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] = \dot{Q}_{líq.e} + \dot{W}_{líq.e} \quad (1)$$

= 0 já que a elevação entre os centros das seções (1) e (2) é nula

= 0 já que o escoamento é adiabático.

- Precisamos encontrar os valores da vazão em massa na bomba, \dot{m} , e das velocidades nas seções (1) e (2) do volume de controle para que seja possível calcular a potência.

- A vazão em massa pode ser calculada por,

$$\dot{m} = \rho Q = (1000)(0,019) = 19,0 \text{ kg / s}$$

► **A velocidade nas seções de escoamento é** $V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi(D/2)^2}$

► **Assim,** $V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0,019}{\pi(89 \times 10^{-3} / 2)^2} = 3,1 \text{ m/s}$

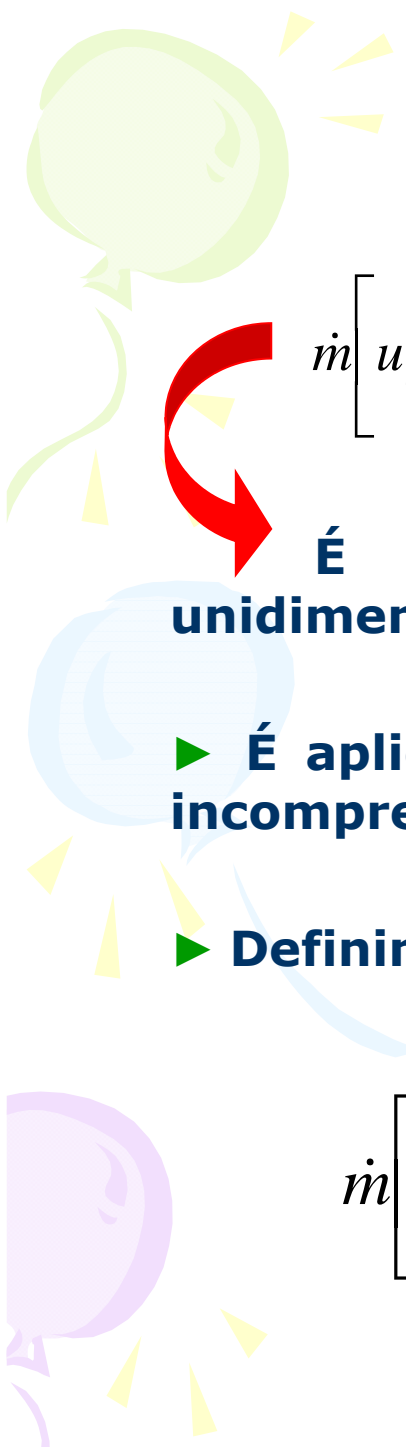
$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0,019}{\pi(25 \times 10^{-3} / 2)^2} = 38,7 \text{ m/s}$$

► **Aplicando a equação (1),**

$$\dot{W}_{\text{líq.e}} = \dot{W}_{\text{líq.eixo}} = \dot{m} \left[u_s - u_e + \left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} \right]$$

$$\dot{W}_{\text{líq.eixo}} = (19,0) \left[(279) + \left(\frac{4,14 \times 10^5}{1000} \right) - \left(\frac{1,24 \times 10^5}{1000} \right) + \frac{(38,7)^2 - (3,1)^2}{2} \right]$$

$$\dot{W}_{\text{líq.eixo}} = 24,9 \text{ kW}$$


$$\dot{m} \left[u_s - u_e + \left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] = \dot{Q}_{\text{líqu.e}} + \dot{W}_{\text{líqu.e}}$$

É a equação da energia para escoamentos unidimensionais e permanentes em média.

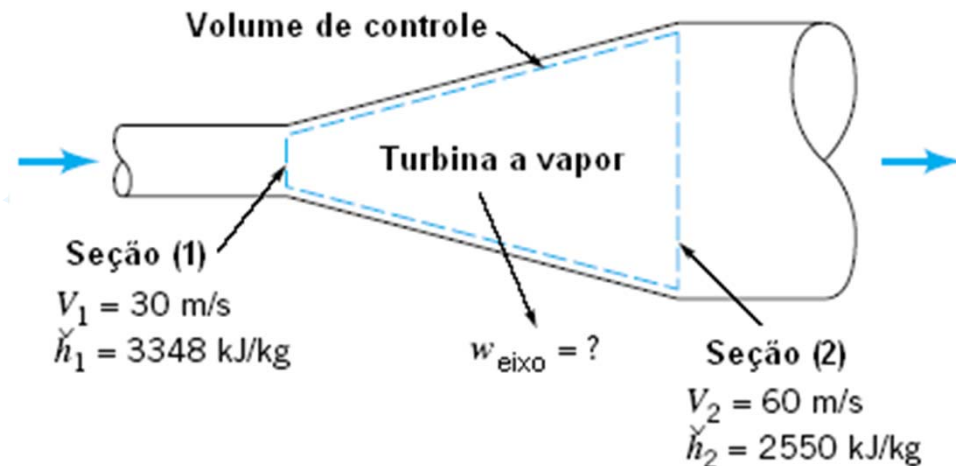
▶ **É aplicável para escoamentos compressíveis (gases) e incompressíveis (líquidos).**

▶ **Definindo a entalpia por, $h = u + \frac{p}{\rho}$, vem que,**

$$\dot{m} \left[h_s - h_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] = \dot{Q}_{\text{líqu.e}} + \dot{W}_{\text{líqu.e}}$$

Exercícios

2) A figura abaixo mostra o esquema de uma turbina a vapor. A velocidade e a entalpia específica do vapor na seção de alimentação da turbina são iguais a 30 m/s e 3348 kJ/kg. O vapor deixa a turbina como uma mistura de líquido e vapor, com entalpia específica de 2550 kJ/kg, e a velocidade do escoamento na da seção de descarga da turbina é de 60 m/s. Determine o trabalho no eixo da turbina por unidade de massa de fluido que escoa no equipamento sabendo que o escoamento pode ser modelado como adiabático e que as variações de cota do escoamento são desprezíveis.



Solução

► Consideremos a equação

$$\dot{m} \left[u_s - u_e + \left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] = \dot{Q}_{líq.e} + \dot{W}_{líq.e} \quad (1)$$

= 0 já que a elevação entre os centros das seções (1) e (2) é nula

= 0 já que o escoamento é adiabático.

$$\dot{W}_{líq.eixo} = \dot{m} \left[h_s - h_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} \right]$$

► Onde $h_s = u_s + \left(\frac{p}{\rho} \right)_s$ e $h_e = u_e + \left(\frac{p}{\rho} \right)_e$

► Como $w_{líq.eixo} = \frac{\dot{W}_{líq.eixo}}{\dot{m}} = h_s - h_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2}$



► **Vem que,**

$$w_{líq.eixo} = 2550 \times 10^3 - 3348 \times 10^3 + \frac{(30)^2 - (60)^2}{2} = -797 \text{ kJ / kg}$$



► $w_{líq.eixo} < 0$ **porque o trabalho está sendo realizado pelo fluido que escoar no equipamento.**

5.3.3 Comparação da Equação da Energia com a equação de Bernoulli

- ▶ Consideremos um escoamento incompressível e permanente com potencia nula. Então, temos

$$\dot{m} \left[u_s - u_e + \left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] = \dot{Q}_{\text{líq.e}}$$

- ▶ Dividindo esta equação por \dot{m}

$$u_s - u_e + \left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) = \frac{\dot{Q}_{\text{líq.e}}}{\dot{m}}$$


$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2} + gz_e - (u_s - u_e - q_{\text{líq.e}})$$

- ▶ $q_{\text{líq.e}} = \dot{Q}_{\text{líq.e}} / \dot{m}$ é a taxa de transferência de calor por unidade de massa que escoar no volume de controle.



► **A equação**

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2} + gz_e - (u_s - u_e - q_{\text{líq.e}})$$



É aplicável a escoamento unidimensionais, permanentes, com uma seção de entrada e outra de saída, ou entre duas seções de uma mesma linha de corrente.

► $q_{\text{líq.e}} = \dot{Q}_{\text{líq.e}} / \dot{m}$ **é a taxa de transferência de calor por unidade de massa que escoo no volume.**

► **Se os efeitos viscosos forem desprezíveis no escoamento, então,**

$$u_s - u_e - q_{\text{líq.e}} = 0$$

- ▶ Assim, chegamos a própria equação de Bernoulli,

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2} + gz_e \quad \text{ou} \quad p_s + \frac{\rho V_s^2}{2} + \gamma z_s = p_e + \frac{\rho V_e^2}{2} + \gamma z_e$$

- ▶ A equação de Bernoulli serve para descrever o que acontece entre duas seções de um escoamento unidimensional.

- ▶ Quando o escoamento é incompressível, entretanto, existe atrito e,

$$u_s - u_e - q_{\text{líq.e}} > 0$$

- ▶ Esta quantidade representa a perda da energia disponível no escoamento devido ao atrito.

$$u_s - u_e - q_{\text{líq.e}} = \textit{perda}$$

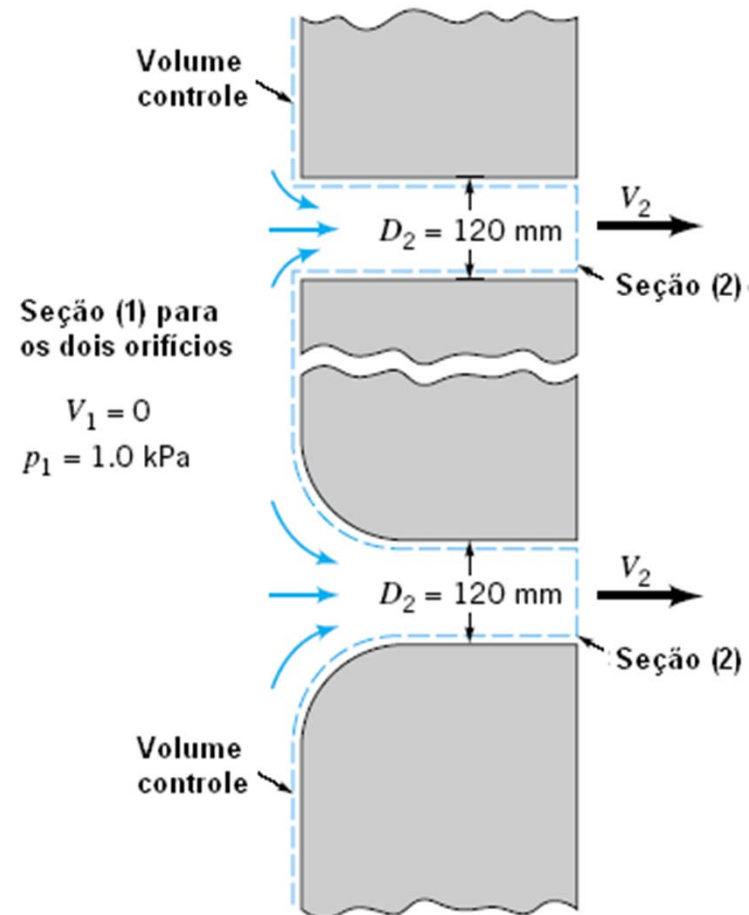
► Dessa forma, chegamos a equação de Bernoulli,

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2} + gz_e - {}_1perda_2$$

Perda de energia
por unidade de
massa entre as
seções 1 e 2

Exercício

A figura abaixo mostra dois orifícios localizados numa parede com espessura de 120 mm. Os orifícios são cilíndricos e um deles apresenta entrada arredondada. O ambiente do lado esquerdo apresenta pressão constante de 1,0 kPa acima do valor da atmosfera e a descarga dos dois orifícios ocorre na atmosfera. Como discutiremos em Mec. Flu. II, a perda de energia disponível em orifícios com entradas bruscas (orifício superior) é $0,5V_2^2/2$, e para orifícios arredondados (orifício inferior) é $0,05V_2^2/2$. Nestas condições, determine as vazões nos orifícios.





Solução

A vazão num dos orifícios, Q , é dada por: $Q = A_2V_2$ (1)

Considerando a equação

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 - {}_1perda_2$$

Como $V_1 = 0$ e $z_1 = z_2$, então,

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} - {}_1perda_2,$$

Assim,

$$V_2 = \left[2 \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right) - {}_1perda_2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

Agora, vamos estudar a perda de energia entre as seções (1) e (2).

Empiricamente, temos,

$${}_1perda_2 = K_L \frac{V_2^2}{2}$$

K_L é o coeficiente de perda, sendo:

- $K_L = 0,5$ para orifícios com entrada brusca (orifício superior)*
- $K_L = 0,05$ para orifícios com entrada arredondada (orifício inferior)*

Daí,

$$V_2 = \left[2 \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right) - K_L \frac{V_2^2}{2} \right]^{1/2} \quad (3)$$

Trabalhando na equação,

$$V_2 = \left[2 \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} \right) - K_L \frac{V_2^2}{2} \right]^{1/2}$$

$$V_2^2 = 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho} - K_L \frac{V_2^2}{2}$$

$$V_2^2 + K_L \frac{V_2^2}{2} = 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

$$V_2^2 (1 + K_L) = 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

Obtemos,

$$V_2 = \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 + K_L)} \right]^{1/2} \quad (4)$$

De (1) em (2),

$$Q = A_2 V_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} \left[\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 + K_L)} \right]^{1/2}$$

Assim:

No orifício superior, $K_L = 0,5$

$$Q = \frac{\pi(0,120)^2}{4} \left[\frac{2(102 \text{ kPa} - 101 \text{ kPa})}{1,23(1 + 0,5)} \right]^{1/2}$$

$$Q = 0,372 \text{ m}^3 / \text{s}$$

No orifício inferior, $K_L = 0,05$

$$Q = \frac{\pi(0,120)^2}{4} \left[\frac{2(102 \text{ kPa} - 101 \text{ kPa})}{1,23(1 + 0,05)} \right]^{1/2}$$

$$Q = 0,445 \text{ m}^3 / \text{s}$$

▶ Agora, vamos considerar a potência líquida não nula, além de escoamentos unidimensionais, incompressíveis e permanentes.

▶ A equação que modela esses escoamentos é,

$$\dot{m} \left[u_s - u_e + \frac{p_s}{\rho} - \frac{p_e}{\rho} + \frac{V_s^2 - V_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right] = \dot{Q}_{líq.e} + \dot{W}_{líq.e}$$


▶ Dividindo por \dot{m}

$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2} + gz_e + w_{líq.e} - (u_s - u_e - q_{líq.e})$$

Onde: $w_{líq.e} = \dot{W}_{líq.e} / \dot{m}$ é o trabalho por unidade de massa.

$(u_s - u_e - q_{líq.e})$ continua sendo a perda de energia devido ao atrito.

► Com estas considerações,


$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2} + gz_e + w_{líq.e} - perda$$

Esta equação é conhecida como equação da energia ou de Bernoulli estendida. Cada um dos seus termos tem unidade (J/kg).

► Se dividirmos cada termo da equação acima por g (aceleração da gravidade),

$$\frac{p_s}{g\rho} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s = \frac{p_e}{g\rho} + \frac{V_e^2}{2g} + z_e + \frac{w_{líq.e}}{g} - \frac{perda}{g}$$

$$\frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s = \frac{p_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g} + z_e + h_{eixo} - h_L$$

► Na equação,

$$\frac{p_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s = \frac{p_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g} + z_e + h_{eixo} - h_L$$

$$h_{eixo} = \frac{W_{líq.eixo}}{g} = \frac{\dot{W}_{líq.eixo}}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_{líq.eixo}}{\gamma Q}$$

$$h_L = \frac{\textit{perda}}{g}$$

Todos os termos desta equação têm dimensão de comprimento, ou energia por unidade de força (peso)

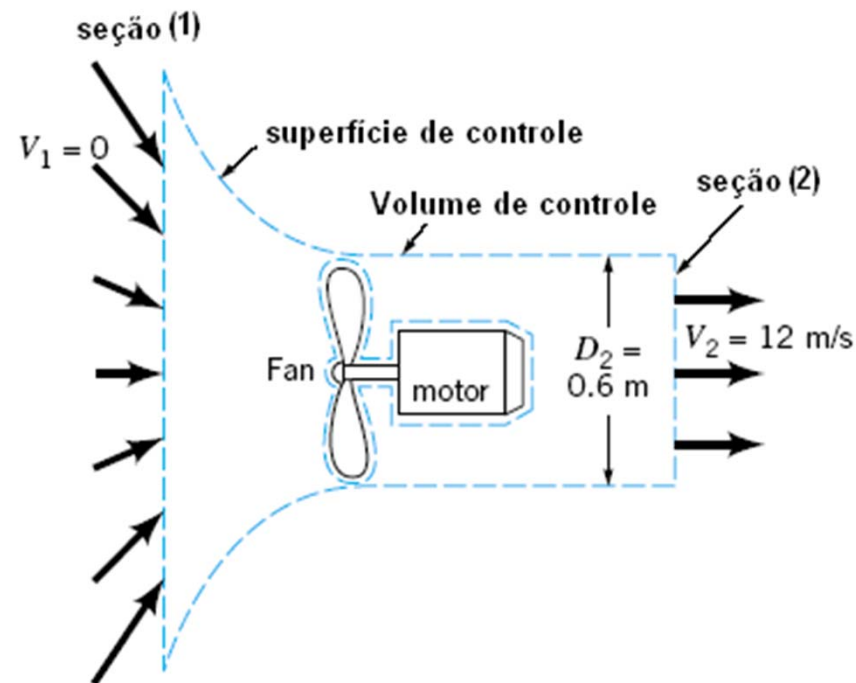
► Na hidráulica, é comum denominar

$$h_{eixo} = \begin{cases} -h_T \text{ (com } h_T > 0) \text{ para turbina} & - \textit{CARGA DA TURBINA} \\ h_b \text{ para bombas} & - \textit{CARGA DA BOMBA} \end{cases}$$

$$h_L \quad - \quad \textit{PERDA DE CARGA}$$

Exercício

A figura abaixo mostra o esquema de um ventilador axial que é acionado por um motor que transfere 0,4 kW para as pás do ventilador. O escoamento a jusante do ventilador pode ser modelado como cilíndrico (diâmetro de 0,6 m) e o ar nessa região apresenta velocidade igual a 12 m/s. O escoamento a montante do ventilador apresenta velocidade desprezível. Determine o trabalho transferido ao ar, ou seja, o trabalho que é convertido em aumento de energia disponível no escoamento e estime a eficiência mecânica deste ventilador.





Solução

A equação que modela esse dispositivo é


$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + w_{\text{líqu.eixo}} - \text{perda}_2$$



► *De acordo com os dados da figura e do enunciado,*

$$p_1 = p_2 = p_0 = 0 \text{ (relativa)}, \quad V_1 = 0 \quad \text{e} \quad z_1 = z_2$$

Logo,


$$w_{\text{líqu.eixo}} - \text{perda} = \frac{V_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad w_{\text{líqu.eixo}} - \text{perda} = \frac{12^2}{2} = 72 \text{ J / kg}$$

► A eficiência deste tipo de dispositivo é definida como a razão entre a quantidade de trabalho útil, isto é, aproveitado para aumentar a energia do escoamento e a quantidade total de trabalho fornecido pelas pás. Ou seja,

$$n = \frac{\text{Trabalho útil}}{\text{Trabalho total}} = \frac{W_{\text{líqu.eixo}} - \text{perda}}{W_{\text{líqu.eixo}}}$$

► O trabalho fornecido às pás, por sua vez, vale,

$$W_{\text{líqu.eixo}} = \frac{\dot{W}_{\text{líqu.eixo}}}{\dot{m}}$$

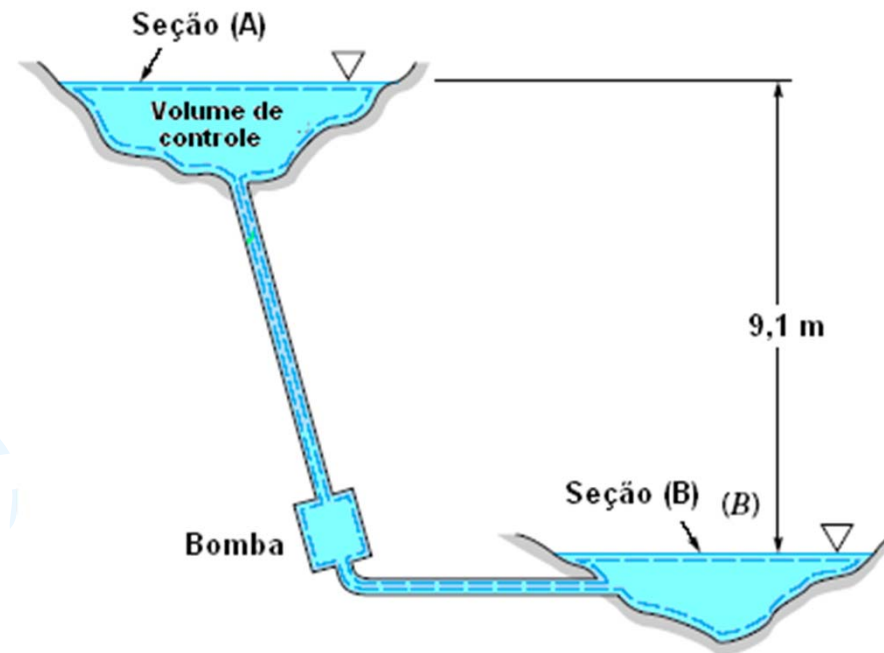
$$\text{Com, } \dot{m} = \rho AV = \rho \pi \left(\frac{D_2}{2} \right)^2 = 1,23 \times \pi \frac{(0,6)^2}{4} = 4,17 \text{ kg / s}$$

$$\text{Então, } w_{\text{líqu.eixo}} = \frac{400}{4,17} = 95,9 \text{ J / kg} \quad e \quad n = \frac{72}{95,9} = 0,75$$

75% do trabalho é aproveitado e 25% é perdido devido ao atrito

Exercício

A vazão da bomba d'água indicada na figura abaixo é igual a $0,056 \text{ m}^3/\text{s}$ e o equipamento transfere $7,46 \text{ kW}$ para a água que escoar na bomba. Sabendo que a diferença entre as cotas das superfícies dos reservatórios indicados na figura $9,1 \text{ m}$, determine as perdas de carga e de potência no escoamento de água.






Solução

Precisamos encontrar h_{eixo} , h_L e $\dot{W}_{perdida}$. Vamos usar a equação.

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + w_{líq.eixo} - h_{eixo} - h_L$$

A e B representam as superfícies livres:

$p_A = p_B = 0$ (relativa), $V_A = V_B = 0$, $z_B = 0$, $z_A = 9,1m$. Assim, temos,


$$z_A = h_{eixo} - h_L$$



► Seguindo as definições,


$$h_{eixo} = \frac{\dot{W}_{líq.eixo}}{\gamma Q} = \frac{7460 \text{ kW}}{9810 (\text{N} / \text{m}^3) \times 0,056 (\text{m}^3 / \text{s})} = 13,6 \text{ m}$$



Daí,

$$h_L = h_{eixo} - z_A = 16,6 - 9,1 = 4,5 \text{ m}$$

Para calcular a potência perdida, podemos usar a equação


$$h_{eixo} = \frac{\dot{W}_{líq.eixo}}{\gamma Q} \text{ (novamente)}$$



Adequando esta última equação, temos,

$$h_L = \frac{\dot{W}_{\text{eixo perdida}}}{\gamma Q}$$

Se h_L representa a perda de carga, então,

$$\dot{W}_{\text{eixo.perdida}} = \gamma Q h_L = 9810 \times 0,056 \times 4,5 = 2,47 \text{ kW}$$

5.3.4 Aplicação da Equação da Energia para escoamentos não uniformes

► Consideremos a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} e \rho dV + \int_{sc} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{Q}_{liq.e} + \dot{W}_{liq.e}$$

► Em situações nas quais o perfil da velocidade não é uniforme em qualquer região onde o escoamento cruza a superfície de controle sugere que a integral

$$\int_{sc} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$

requer atenção.



▶ Sem uma prova matemática convincente, por hora, vamos admitir que,

$$\int_{sc} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{m} \left(\frac{\alpha_s \bar{V}_s^2}{2} - \frac{\alpha_e \bar{V}_e^2}{2} \right)$$



▶ Lembre-se que os índices s corresponde a saída e e a entrada, respectivamente, no volume de controle.

▶ α é o coeficiente de energia cinética e \bar{V} é a velocidade media definida pela equação

$$\bar{V} = \frac{\int_A \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA}{\rho A}$$



► A partir desses resultados, obtemos,

$$\frac{\dot{m}\alpha\bar{V}_2}{2} = \int_A \left(\frac{V^2}{2} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA$$



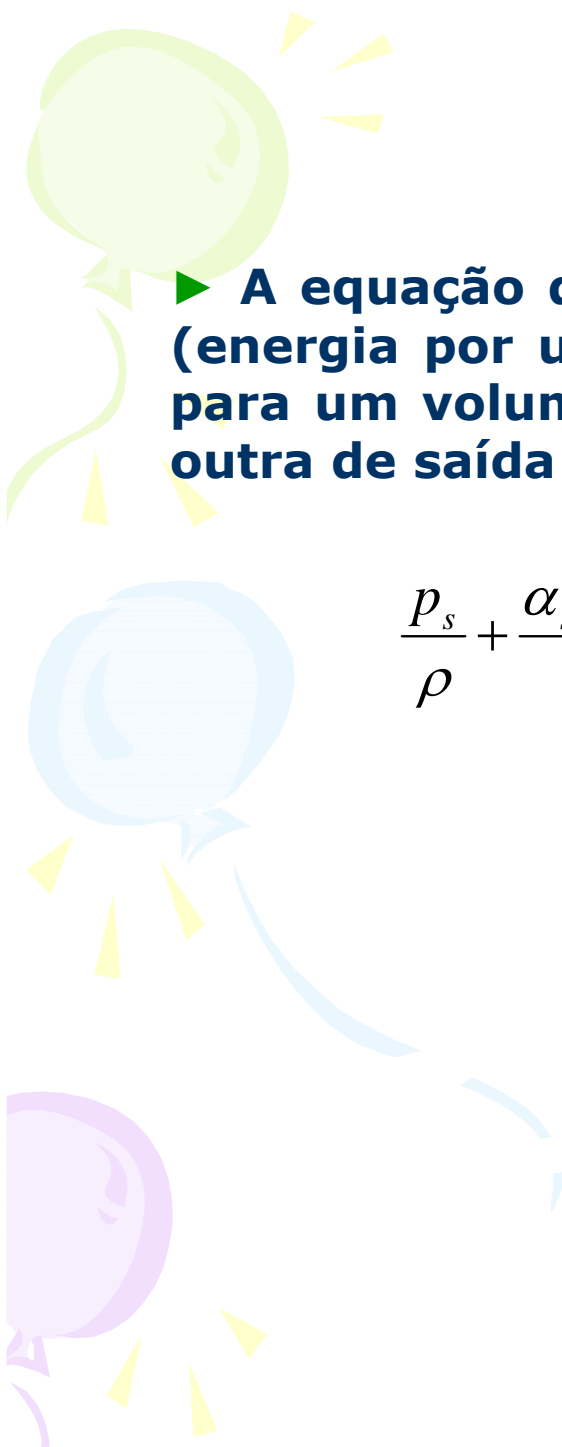
► Para o escoamento que cruza a região da superfície de controle que apresenta área A . Assim,

$$\alpha = \frac{\int_A \left(\frac{V^2}{2} \right) \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA}{\dot{m}\bar{V}_2 / 2}$$



► É possível mostrar que:

- $\alpha \geq 1$ para qualquer perfil de velocidade.
- $\alpha = 1$ apenas para escoamentos uniformes.



► A equação da energia para escoamentos não uniformes (energia por unidade de massa), incompressíveis e válida para um volume de controle com uma seção de entrada e outra de saída é,

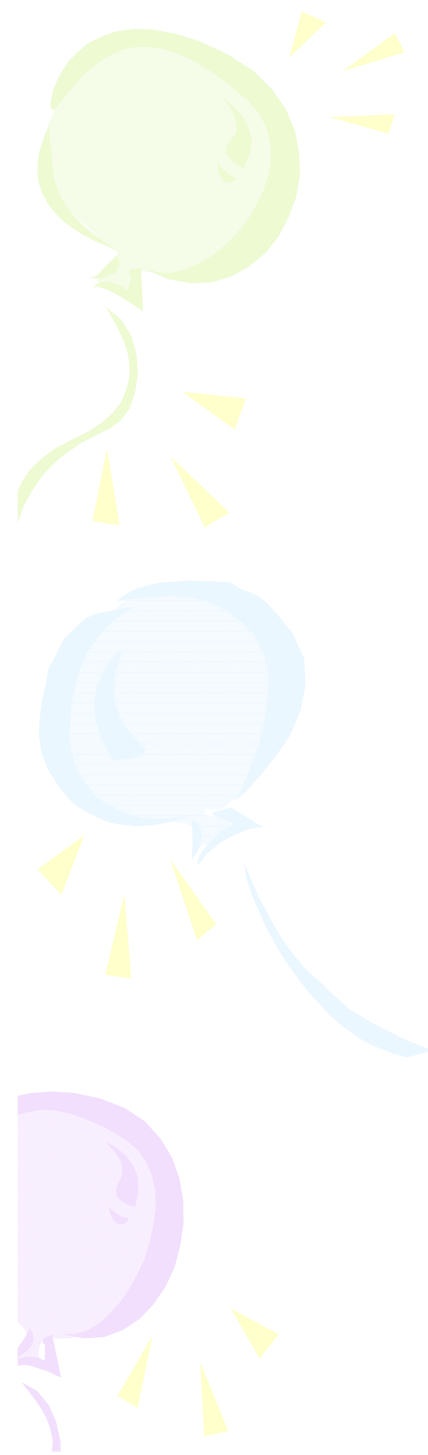
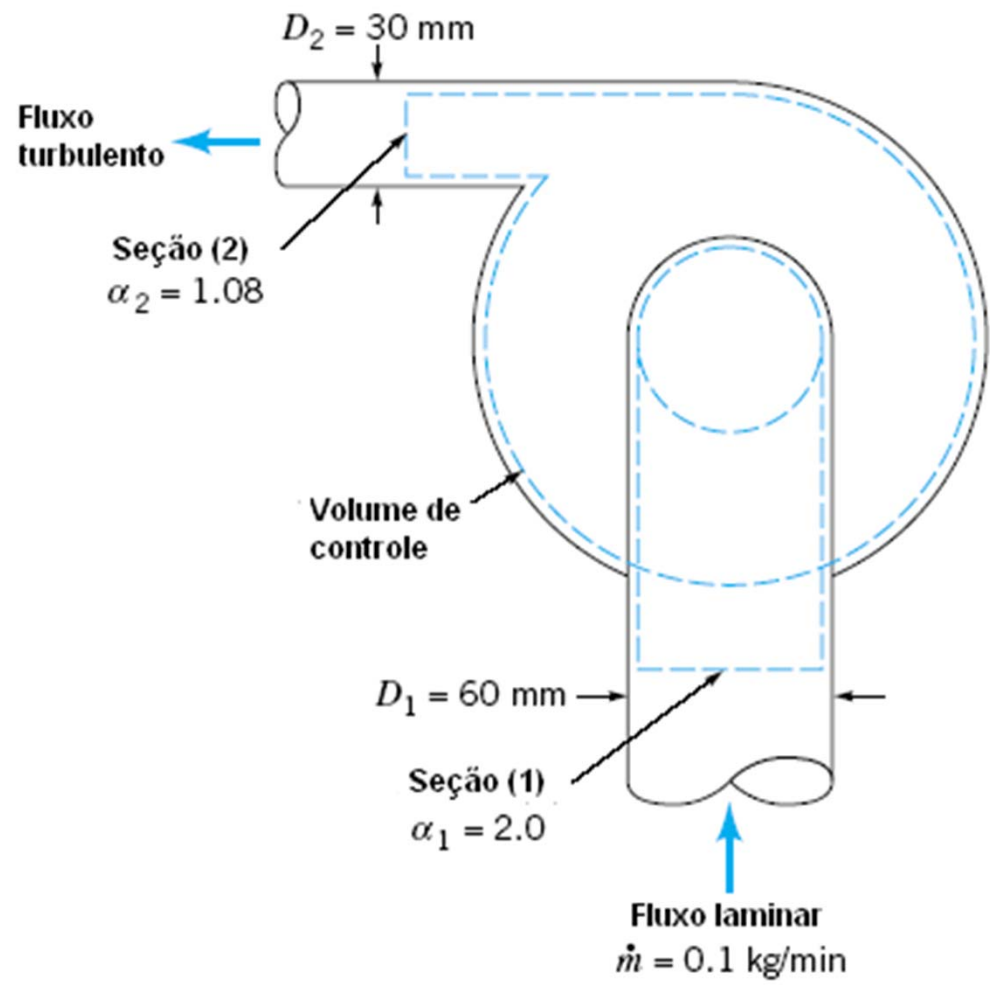
$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{\alpha_s \bar{V}_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{\alpha_e \bar{V}_e^2}{2} + gz_e + w_{líq.e} - perda$$



Exercício

A vazão em massa de ar no pequeno ventilador esboçado na figura a seguir é $0,1 \text{ kg/min}$. O escoamento no tubo de alimentação do ventilador é laminar (perfil parabólico) e o coeficiente de energia cinética, neste escoamento, é $2,0$. O escoamento no tubo de descarga do ventilador é turbulento (mas o perfil de velocidade é muito próximo do uniforme) e o coeficiente de energia cinética é $1,08$. O aumento de pressão estática no ventilador é $0,1 \text{ kPa}$ e a potência consumida na operação equipamento é $0,14 \text{ W}$. Compare os valores da perda de energia disponível calculadas nas seguintes condições:

- a) Admitindo que todos os perfis de velocidade são uniformes.
- b) Considerando os perfis de velocidade reais nas seções de alimentação e descarga do ventilador.



Solução

Considerando a equação.

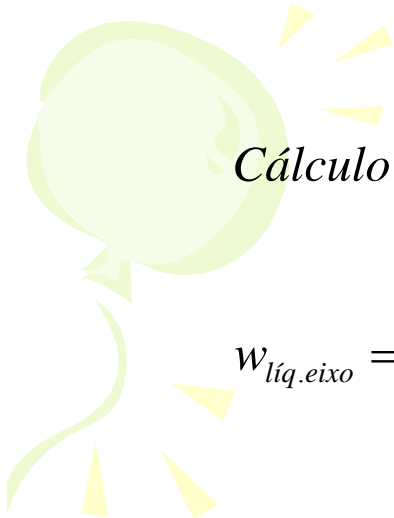
$$\frac{p_s}{\rho} + \frac{\alpha_s \bar{V}_s^2}{2} + gz_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{\alpha_e \bar{V}_e^2}{2} + gz_e + w_{\text{líqu.eixo}} - \text{perda}$$

Como $z_s = z_2$, $z_e = z_1$ e $z_2 \cong z_1$, vem que,

$$\text{perda} = w_{\text{líqu.eixo}} - \frac{p_2}{\rho} - \frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2}$$

$$\text{perda} = w_{\text{líqu.eixo}} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) + \frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2} - \frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2} \quad (1)$$

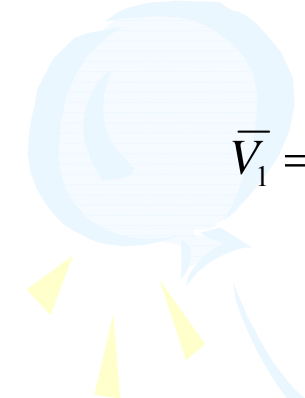
É preciso conhecer os valores de $w_{\text{líqu.eixo}}$, \bar{V}_1 e \bar{V}_2 para calcular a perda, já que $p_2 - p_1 = 0,1 \text{ kPa}$




Cálculo de $w_{líq.eixo}$,

$$w_{líq.eixo} = \frac{\text{Potência fornecida ao ventilador}}{\dot{m}} = \frac{0,14}{(0,1)/60} = 84 \text{ J / kg}$$

Cálculo de \bar{V}_1 ,


$$\bar{V}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{(0,1/60)}{\left[1,23 \times \pi \times \left(\frac{0,06}{2}\right)^2\right]} = 0,48 \text{ m / s}$$

Cálculo de \bar{V}_2 ,


$$\bar{V}_2 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{(0,1/60)}{\left[1,23 \times \pi \times \left(\frac{0,03}{2}\right)^2\right]} = 1,92 \text{ m / s}$$

Agora, resolvendo:

a) Considerando perfis uniformes: substituindo $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, em (1),

$$\textit{perda} = 84 - \left(\frac{0,1 \times 10^3}{1,23} \right) + \frac{(0,48)^2}{2} - \frac{(1,92)^2}{2}$$

$$\textit{perda} = 0,98 \textit{ J / kg}$$

b) Considerando perfis não uniformes: substituindo $\alpha_1 = 2,0$, $\alpha_2 = 1,08$, em (1),

$$\textit{perda} = 84 - \left(\frac{0,1 \times 10^3}{1,23} \right) + \frac{2 \times (0,48)^2}{2} - \frac{1,08 \times (1,92)^2}{2}$$

$$\textit{perda} = 0,95 \textit{ J / kg}$$

$\textit{perda}_{\textit{uniforme}} \approx \textit{perda}_{\textit{n\~{a}o\ uniforme}}$ se comparadas com o valor de $w_{\textit{l\~{i}q.}\textit{eixo}}$.