Universidade Federal do ABC

Capítulo 4 – Cinemática dos Fluidos

Como na física básica, estudaremos os movimentos de partículas fluidas sem nos preocuparmos com as suas causas. Isto é, sem nos preocuparmos com as forças que causam o movimento.

4.1 Campo de velocidades

- **Como os fluidos tratados aqui são considerados meios contínuos, decorre que podemos considerar que as partículas fluidas são compactas.**

- **Significa que sua pressão, velocidade, aceleração e massa específica, entre outras, podem ser descritas em função da posição da partícula e do tempo.**

- **Isto leva à noção de campo, como discutido anteriormente (capítulo 2 e na revisão de cálculo vetorial).**

Universidade Federal do ABC

- **A representação dos parâmetro de um fluido escoando em função das suas coordenadas espaciais é denominada representação do campo de escoamento.**

- **Uma das variáveis mais importantes é a velocidade de um campo de escoamento, cuja forma geral é**

$$\mathbf{V} = u(x,y,z)\mathbf{i} + v(x,y,z)\mathbf{j} + w(x,y,z)\mathbf{k}$$

***u*, *v* e *w* são as componentes do vetor velocidade.**

- ***u*, *v* e *w* são funções das coordenadas espaciais do ponto considerado no escoamento.**

- $$V = \left|\mathbf{V}\right| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

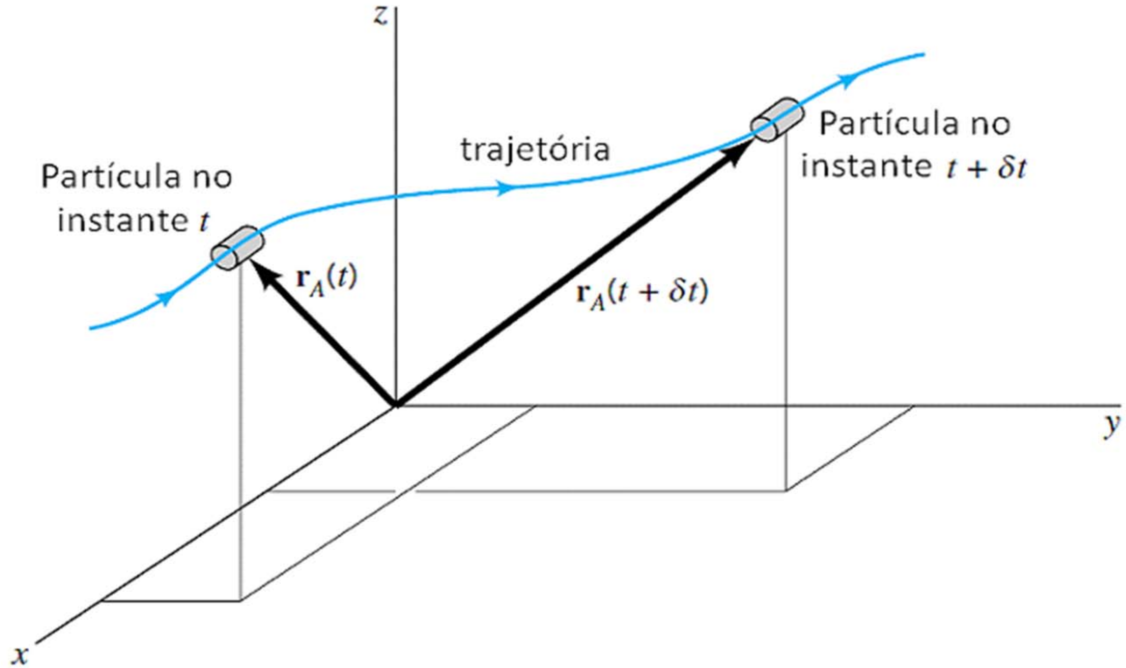
Universidade Federal do ABC

- **Por definição** $\mathbf{V}_A = \dfrac{d\mathbf{r}_A}{dt}$

é a velocidade instantânea de uma partícula fluida A.

- $\mathbf{a}_A = \dfrac{d\mathbf{V}_A}{dt}$ **é a aceleração da partícula A**

provocada por uma mudança de velocidade (direção ou magnitude) no tempo.



Exemplo 4.1

O campo de velocidade de um escoamento é dado por

$$\mathbf{V} = \frac{V_0}{\ell}(x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j})$$

Onde V_o e ℓ são constante. Determine o local no campo de escoamento onde a velocidade é igual a V_o e construa um esboço do campo de velocidade no primeiro quadrante ($x \geq 0$ e $y \geq 0$).

Solução

► **Se** $$\mathbf{V} = \left(\frac{V_0}{\ell}\right)(x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}) = u(x,y)\mathbf{i} + v(x,y)\mathbf{j}, \quad \textit{então,}$$

$$u(x,y) = \frac{V_0}{\ell}x \quad , \quad v(x,y) = -\frac{V_0}{\ell}y \quad e$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\left(\frac{V_0}{\ell}x\right)^2 + \left(-\frac{V_0}{\ell}y\right)^2}$$

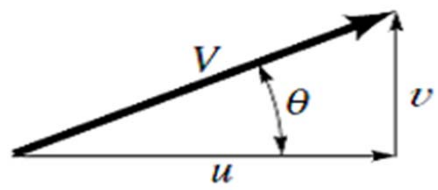
$$V = \frac{V_0}{\ell}\sqrt{x^2 + y^2}$$

► **Para termos $V = V_0$, $x^2 + y^2 = \ell^2$. Esta é a equação de uma circunferência (lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância ℓ da origem).**

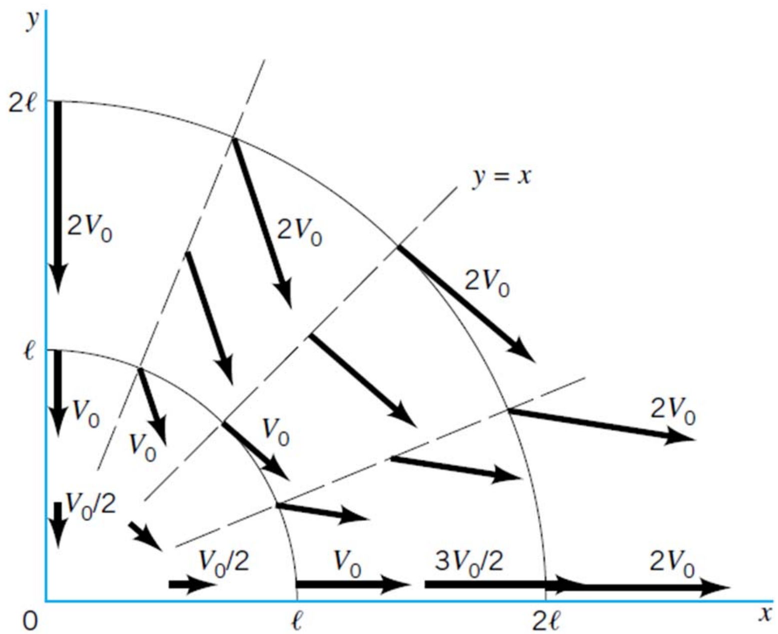
► **A direção do vetor velocidade é tal que:**

$$\tan\theta = \frac{v}{u} = \frac{-V_0 y/\ell}{V_0 x/\ell} = -\frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{y}{x}\right)$$



► **Ilustração do campo,**



Exercício 4.1

O campo de velocidade de um escoamento é dado por

$$\mathbf{V} = (3y+2)\,\mathbf{i} + (x-8)\,\mathbf{j} + 5z\,\mathbf{k} \quad (m/s)$$

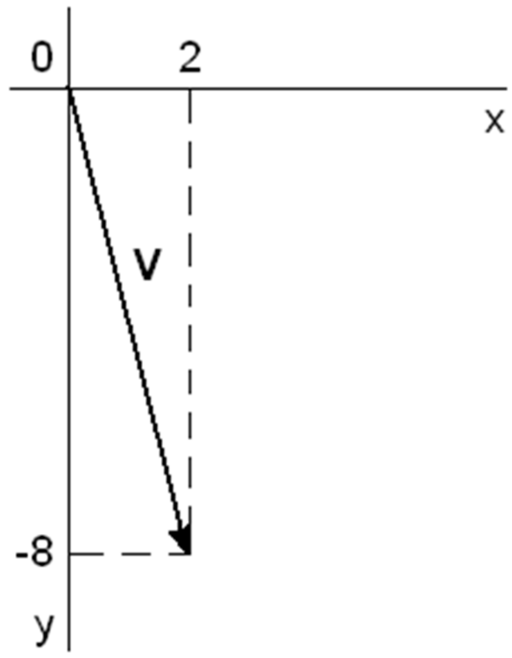
Onde *x*, *y* e *z*. São medidos em metros. Determine a velocidade do fluido na origem (*x* = *y* = *z* = 0) e no eixo y, (*x* = *z* = 0).

Solução

i) Velocidade na origem, x = y = z = 0.

$$\mathbf{V} = (3y+2)\mathbf{i} + (x-8)\mathbf{j} + 5z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = (3\times 0+2)\mathbf{i} + (0-8)\mathbf{j} + 5\times 0\,\mathbf{k}$$



$$\mathbf{V} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$$

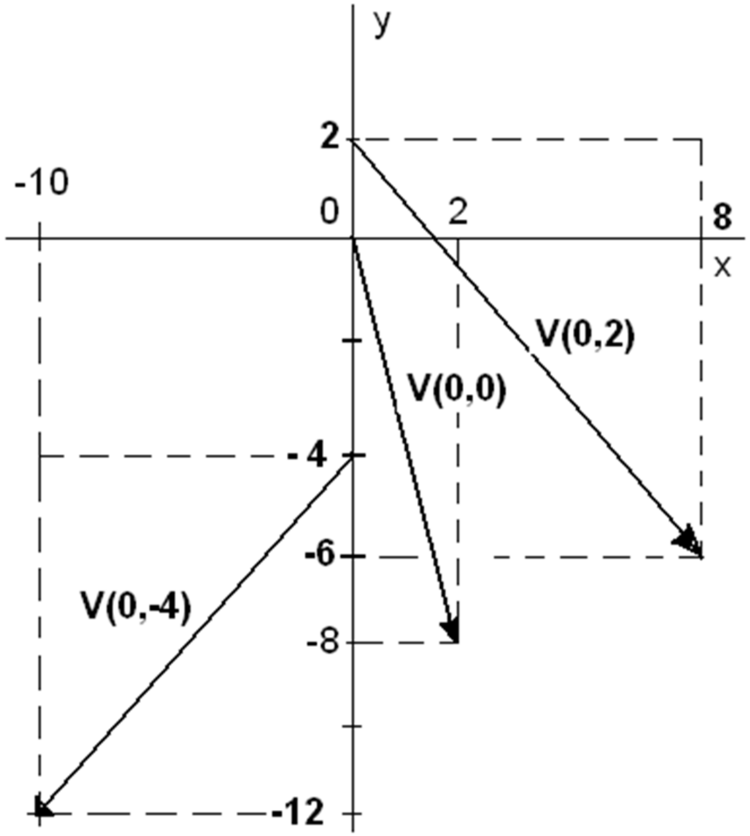
Universidade Federal do ABC

ii) Velocidade no eixo y, x = z = 0.

$$\mathbf{V} = (3y+2)\mathbf{i} + (x-8)\mathbf{j} + 5z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = (3y+2)\mathbf{i} + (0-8)\mathbf{j} + 5\times 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = (3y+2)\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$$



4.1.1 Descrições Euleriana e Lagrangeana

► **Leonard Paul Euler (lê-se Óilã) (Basiléia 1707 – São Petersburgo 1783).**

Método de Euler

- **Utiliza o conceito de campo;**

- **O movimento do fluido é descrito pela especificação dos parâmetros necessários em função das coordenadas espaciais:**

  - Pressão, $p = p(x,y,z,t)$;

  - Velocidade, $V = V(x,y,z,t)$;

  - Massa específica, $\rho = \rho(x,y,z,t)$.

- **Informações sobre o escoamento a partir de pontos fixos em instantes diferentes.**

▶ **Joseph-Louis Lagrange (Turim 1736 – Paris 1813).**

<u>Método de Lagrange</u>

- **Identifica a partícula fluida no escoamento;**

- **O movimento do fluido é descrito pela especificação dos parâmetros necessários em função do tempo:**

  - Pressão, $p = p(t)$;

  - Velocidade, $V = V(t)$;

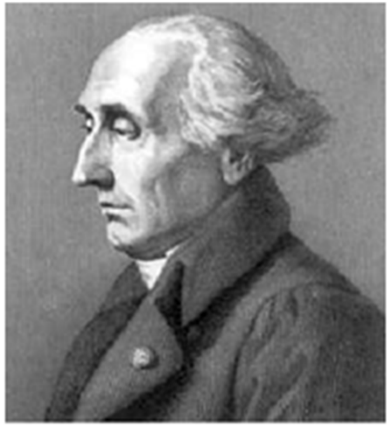
  - Massa específica, $\rho = \rho(t)$;

  - Posição, $P = P(x,y,z,t)$

- **Informações sobre o escoamento correspondem aos valores determinados durante o movimento.**

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Duas maneiras de ver o mundo dos fluidos



Joseph Louis Lagrange
(1736 – 1813)

Euleriano

- **Usa o conceito de campo.**
- **Especificação completa:**
  - **Pressão (x,y,z,t),**
  - **Massa específica (x,y,z,t),**
  - **Velocidade (x,y,z,t).**
- **Informações sobre o escoamento em pontos fixos no espaço.**

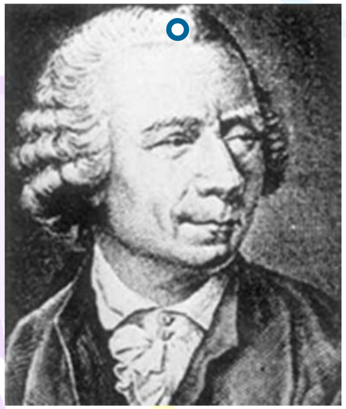
Lagrangeano

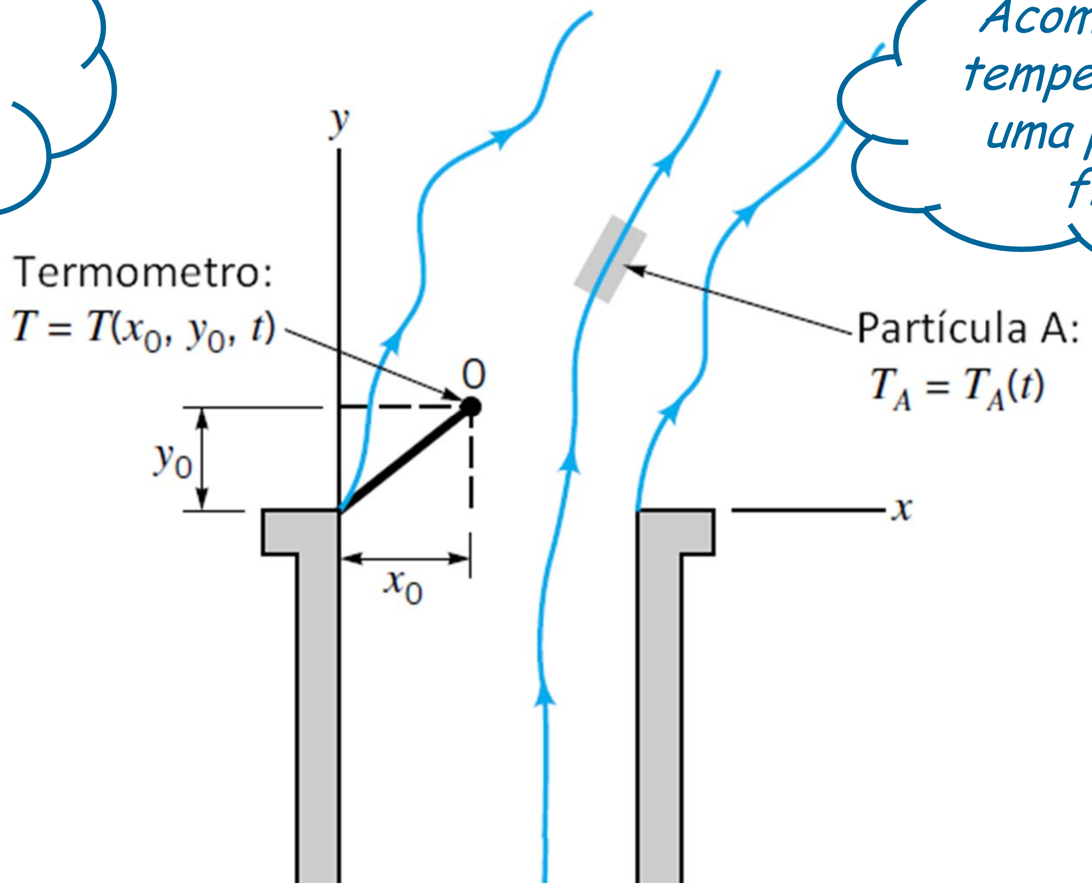
- **Segue as partículas fluidas.**
- **Especificação da partícula:**
  - **Pressão (t)**
  - **Massa específica (t),**
  - **Velocidade (t),**
  - **Posição (x,y,z).**
- **Informações sobre o que acontece com a partícula ao longo do tempo.**

Exemplo

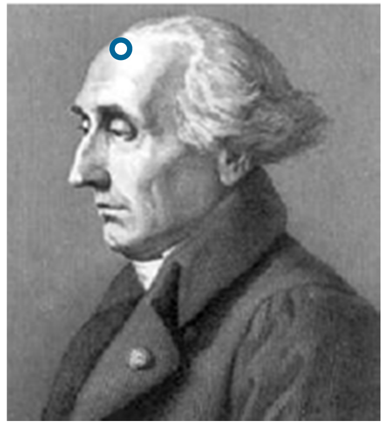
▶ **Temperatura de gás saindo de uma chaminé**

Instalar um termômetro num ponto fixo!





Acompanhar a temperatura de uma partícula fluida!



Método de Euler

► O termômetro instalado perto da abertura indicaria a temperatura de diversas partículas em instantes diferentes. Assim, obtém-se a variação da temperatura, T, nesse ponto, em função de suas coordenadas e do tempo, t.

► Vários termômetros instalados em pontos fixos do escoamento forneceria seu campo de temperatura.

Método de Lagrange

► Um termômetro seria instalado em uma partícula fluida e, assim, registraria sua temperatura ao longo do movimento, isto é, $T = T(t)$.

► Um conjunto de dispositivos para medir a variação da temperatura de várias partículas forneceria a história da temperatura do escoamento. Isto só seria possível se a localização de cada partícula fosse conhecida em função do tempo.

Universidade Federal do ABC

4.1.2 Escoamentos Uni, bi e tridimensionais

► **Em geral, um campo de velocidade de um escoamento é tridimensional, ou seja**

$$\mathbf{V} = u(x, y, z)\,\mathbf{i} + v(x, y, z)\,\mathbf{j} + w(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

► **Em alguns casos, entretanto, uma ou duas componentes são muito menores que a(s) outra(s),**

► **Se $u \gg w$ e $v \gg w$, então, temos um escoamento bidimensional.**

► **Se $u \gg v$ e $u \gg w$, então, temos um escoamento unidimensional (não existem, mas pode ser usados para modelar muitos escoamentos importantes).**

Universidade Federal do ABC

4.1.3 Escoamentos em regime permanente e transitório

Regime permanente

► **Velocidade não varia no tempo,** $\partial V / \partial t = 0$ **, na prática** $\partial V / \partial t \neq 0$.

Escoamento transitório

► **Velocidade varia com o tempo de maneira aleatória. Isto é, não existe uma seqüência regular para a variação.**

4.1.4 Linhas de corrente, de emissão e trajetórias

Linhas de corrente (streamline)

► **Linha contínua que é sempre tangente à velocidade num ponto do escoamento.**

► **Num escoamento permanente, nada muda com o tempo num ponto fixo, nem o vetor velocidade, portanto, as linhas de corrente são fixas.**

► **Para escoamentos bidimensionais,** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v}{u} = \tan\theta$

Esta equação pode ser integrada para fornecer as equações das linhas de corrente, desde que o campo de velocidade seja dado em função de *x*, *y* e *z*, e *t*, se o regime for transitório.

Exemplo

Determine as linhas de corrente para o escoamento bidimensional em regime permanente cujo campo de velocidades é,

$$\mathbf{V} = \left(\frac{V_o}{\ell}\right)(x\,\mathbf{i} - y\mathbf{j})\ (m/s)$$

Universidade Federal do ABC

Solução

$$\mathbf{V} = \left(\frac{V_0}{\ell}\right)(x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j})$$

$$\mathbf{V} = \left(\frac{V_0}{\ell}\right)x\,\mathbf{i} - \left(\frac{V_0}{\ell}\right)y\,\mathbf{j}$$

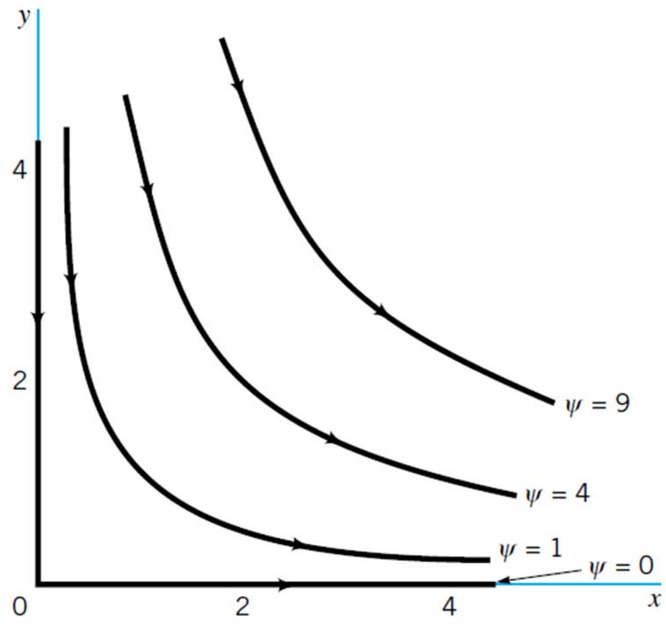
Para as linhas de corrente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v} = \frac{-(V_o/\ell)y}{(V_o/\ell)x} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

▶ **Integrando**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad \rightarrow \qquad \int \frac{dx}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$



$Logo,$

$$\ln(y) = -\ln(x) + C_1 \qquad (C_1 = const.)$$

$$\ln(y) + \ln(x) = C_1$$

$$\ln(yx) = \ln C \qquad (\ln C = C_1)$$

$$yx = C, \quad ou \quad yx = \Psi$$

▶ ***xy* = C, ou *xy* = Ψ, representa uma família de curvas no plano xy (Figura).**

▶ **Ψ é chamada função de corrente.**

Linhas de emissão (streakline)

► Consiste de todas as partículas do fluido que passam por um determinado ponto do escoamento.

► Se o regime de escoamento for permanente, a linhas de emissão coincidem com as linhas de corrente.

Trajetória (Pathline)

► É o caminho traçado por uma dada partícula que escoa de um ponto para outro. É um conceito Lagrangeano e pode ser visualizada a partir de uma fotografia de longa exposição.

► Se o regime de escoamento for permanente, a trajetória e a linha de emissão coincidem com as linhas de corrente.

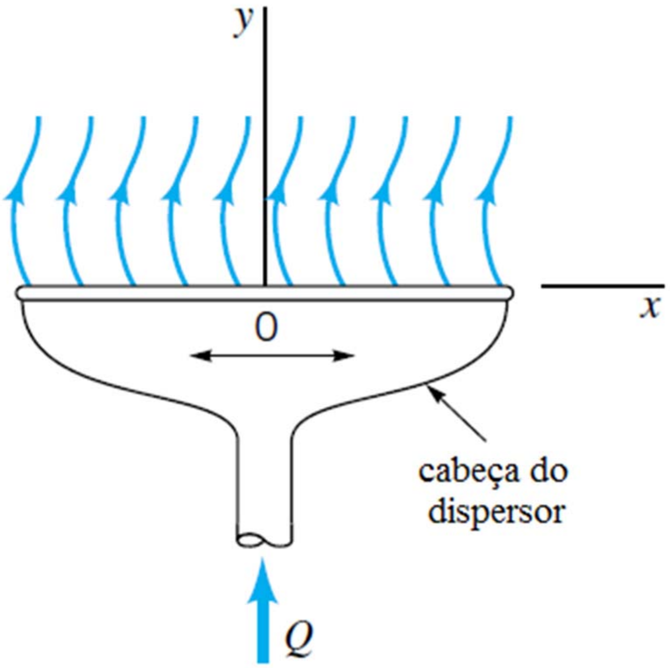
► Para regimes transitórios, nenhum destes três tipos de linha são necessariamente coincidentes.

Exemplo

Um dispersor oscilante produz um fluxo de água cujo campo de velocidades é dado por

$$\mathbf{V} = u_0 sen\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]\hat{\mathbf{i}} + v_0\hat{\mathbf{j}}$$

onde u_0, v_0 e w são constantes.



Obtenha:

a) A linha de corrente que passa pela origem em t = 0 e t = π/2w.

b) A trajetória da partícula que passa pela origem em t = 0 e t = π /2w.

c) A linha de emissão que passa pela origem.

Universidade Federal do ABC

a) A linha de corrente que passa pela origem em *t* = 0 e *t* = π/2*w*.

$$\mathbf{V} = u_0 sen\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]\hat{\mathbf{i}} + v_0\hat{\mathbf{j}}$$

Temos :

$$u = u_0 sen\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] \quad e \quad v = v_0$$

$$Assim, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{v_0}{u_0 sen\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]}$$

Integrando

$$u_0 \int sen\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] dy = v_0 \int dx \quad \rightarrow \quad u_0\left(\frac{v_0}{\omega}\right)\cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] = xv_0 + C$$

onde C é uma constante de integração.

Universidade Federal do ABC

► **A linha de corrente que passa pela origem em *t* = 0.**

$$x = 0,\ y = 0 \ \ e \ \ t = 0$$

$$xv_0 + C = u_0\left(\frac{v_0}{\omega}\right)\cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]$$

$$0v_0 + C = u_0\left(\frac{v_0}{\omega}\right)\cos\left[\omega\left(0 - \frac{0}{v_0}\right)\right]$$

$$C = u_0\left(\frac{v_0}{\omega}\right)\cos(0) \quad \rightarrow \quad C = \frac{u_0 v_0}{w}$$

Logo,

$$xv_0 = u_0\frac{v_0}{\omega}\cos\left[\omega\left(0 - \frac{y}{v_0}\right)\right] - \frac{u_0 v_0}{w}, \quad ou \quad x = \frac{u_0}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega y}{v_0}\right) - 1\right]$$

$$Lembre-se:\ \cos(-\omega y / v_0) = \cos(\omega y / v_0)\ (\,função\ \ par\,)$$

▶ **A linha de corrente que passa pela origem em *t* = π/2w.**

$$x = 0,\ y = 0 \ \ e \ \ t = \pi / 2\omega$$

$$xv_0 + C = u_0\left(\frac{v_0}{\omega}\right)\cos\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]$$

$$0v_0 + C = u_0\left(\frac{v_0}{\omega}\right)\cos\left[\omega\left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{0}{v_0}\right)\right]$$

$$C = u_0\left(\frac{v_0}{\omega}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \quad C = 0$$

$$Logo,$$

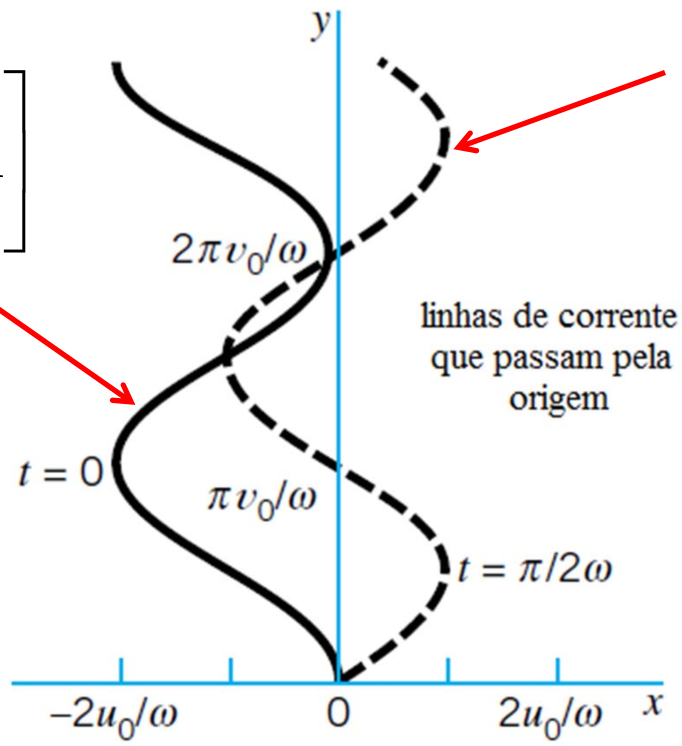
$$xv_0 = u_0\frac{v_0}{\omega}\cos\left[\omega\left(\frac{\pi}{2\omega} - \frac{y}{v_0}\right)\right] = \frac{u_0}{\omega}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega y}{v_0}\right)$$

$$x = \frac{u_0}{\omega}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega y}{v_0}\right)$$

Universidade Federal do ABC

► **Análise: de acordo com os resultados anteriores, as linhas de corrente não são as mesmas em *t* = 0 e *t* = π/2*w*, exatamente, porque o escoamento é transitório.**

$$x = \frac{u_0}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega y}{v_0}\right) - 1\right]$$



$$x = \frac{u_0}{\omega} sen\left(\frac{\omega y}{v_0}\right)$$

b) A trajetória da partícula que passa pela origem em *t* = 0 e *t* = π /2w.

$$\mathbf{V} = u_0 sen\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]\hat{\mathbf{i}} + v_0\hat{\mathbf{j}}$$

$$u = u_0 sen\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] \quad e \quad v = v_0$$

$$u = \frac{dx}{dt} \quad e \quad v = \frac{dy}{dt}$$

Assim, nosso ponto de partida são as equações

$$\frac{dx}{dt} = u_0 sen\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] \quad e \quad \frac{dy}{dt} = v_0$$

$$\textit{Integrando a equação } \frac{dy}{dt} = v_0, \textit{ vem que}$$

$$y = v_0 t + C_1 \quad (C_1 \textit{ é uma constante de integração})$$

Daí,

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \operatorname{sen}\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] = u_0 \operatorname{sen}\left[\omega\left(t - \frac{v_0 t + C_1}{v_0}\right)\right]$$

Assim,

$$\frac{dx}{dt} = -u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega C_1}{v_0}\right)$$

Universidade Federal do ABC

Agora, integrando a equação

$$\frac{dx}{dt} = -u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega C_1}{v_0}\right),$$

vem que

$$\int \frac{dx}{dt}\, dt = -\int u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega C_1}{v_0}\right) dt$$

$$x = -\left[u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega C_1}{v_0}\right)\right] t + C_2 \quad (C_2 = \textit{constante de integração})$$

► **A trajetória da partícula que passa pela origem em *t* = 0.**

$$x = y = 0 \ e \ t = 0$$

Primeiro, substituindo em

$$x = -\left[u_0 \mathrm{sen}\left(\frac{\omega C_1}{v_0}\right)\right]t + C_2$$

$$0 = -\left[u_0 \mathrm{sen}\left(\frac{\omega C_1}{v_0}\right)\right]0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Segundo, substituindo em

$$y = v_0 t + C_1$$

$$0 = v_0 0 + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Assim, as trajetórias em na origem em $t = 0$*, são*

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = v_0 t \end{array}\right\} equações \ paramétricas$$

Universidade Federal do ABC

► **A trajetória da partícula que passa pela origem em *t* = π/2*w*.**

$$x = y = 0 \ e \ t = \pi/2\omega$$

Primeiro, substituindo em

$$y = v_0 t + C_1$$

$$0 = v_0 \frac{\pi}{2\omega} + C_1 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{\pi v_0}{2\omega}$$

Segundo, substituindo em

$$x = -\left[u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega C_1}{v_0}\right)\right] t + C_2$$

$$0 = -\left[u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega(-\pi v_0/2\omega)}{v_0}\right)\right] \frac{\pi}{2\omega} + C_2$$

$$C_2 = -\frac{\pi u_0}{2\omega}$$

Universidade Federal do ABC

Assim, a trajetória da partícula que passa pela origem em $t = \pi / 2\omega$ *é*

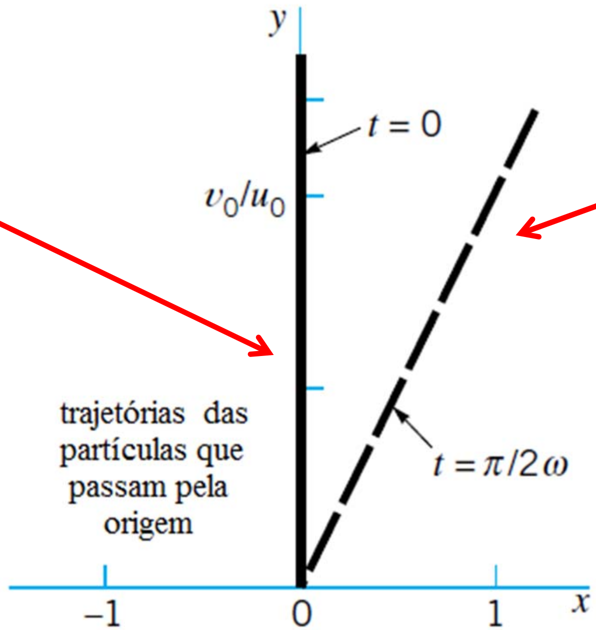
$$x = -\left[u_0 sen\left(\frac{-\frac{\pi v_0}{2\omega}\omega}{v_0}\right)\right]t - \frac{\pi u_0}{2\omega}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = u_0 t - \dfrac{\pi u_0}{2\omega} = u_0\left(t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right) \\ e \\ y = v_0 t - \dfrac{\pi v_0}{2\omega} = v_0\left(t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right) \end{array}\right\} \textit{Equações paramétricas}$$

Das equações acima, ainda podemos escrever, $y = \dfrac{v_0}{u_0}x$

► **Análise: de acordo com os resultados anteriores, as trajetórias não são as mesmas em t = 0 e t = π/2w.**

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = v_0 \end{cases}$$



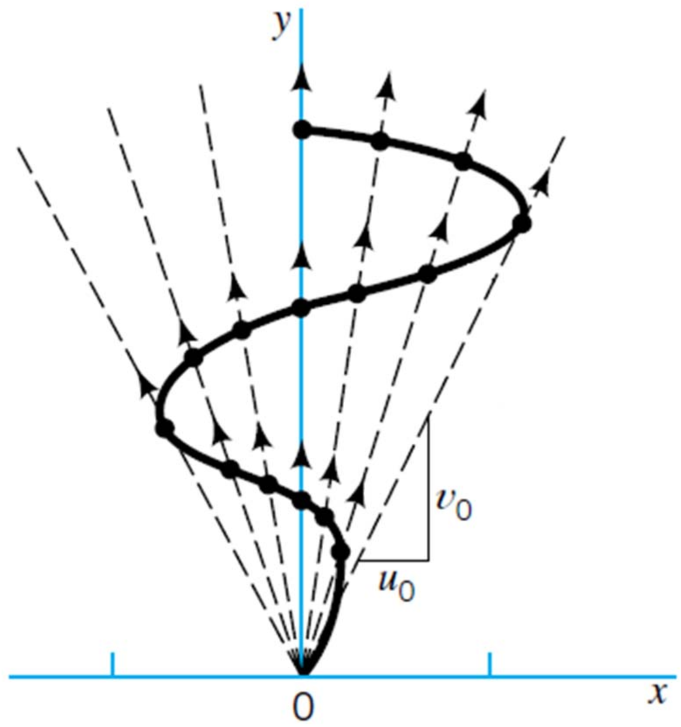
$$\begin{cases} t = \pi / 2\omega \\ y = \dfrac{v_0}{u_0} x \end{cases}$$

c) A linha de emissão que passa pela origem.

Como o escoamento é transitório, $V = V(t)$, as linhas de corrente, Trajetória e emissão não são coincidentes.

► A linha de emissão que passa pela origem é o lugar geométrico das partículas que passaram pela origem.

► São obtidas coma projeção das trajetórias sobre as linhas de corrente.



4.2 Campo de Aceleração

▶ **Dado o campo de velocidades de uma partícula fluida A,**

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_A(\mathbf{r},t) = \mathbf{V}_A(x_A(t), y_A(t), z_A(t), t)$$

▶ **Sua aceleração é, por definição,**

$$\mathbf{a}_A(t) = \frac{d\mathbf{V}_A}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial x}\frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial y}\frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial z}\frac{dz_A}{dt}$$

▶ **Lembrando que,** $u_A = \dfrac{dx_A}{dt}, \quad v_A = \dfrac{dy_A}{dt} \quad e \quad w_A = \dfrac{dz_A}{dt}$

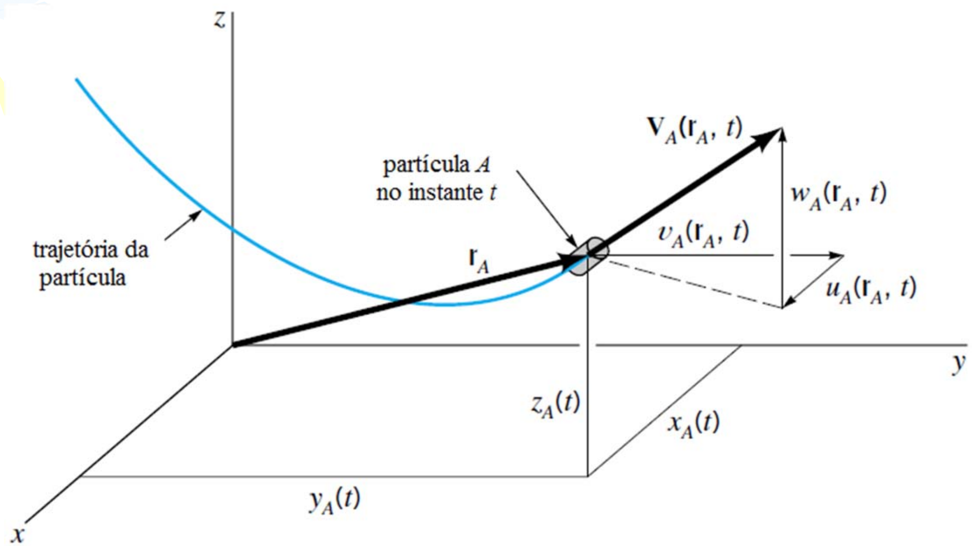
▶ **Vem que** $$\mathbf{a}_A(t) = \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial t} + u_A\frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial x} + v_A\frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial y} + w_A\frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial z}$$

► **Removendo o índice A da equação,**

$$\mathbf{a}_A(t) = \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial t} + u_A \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial x} + v_A \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial y} + w_A \frac{\partial \mathbf{V}_A}{\partial z}$$

► **Podemos generalizar a equação da aceleração para qualquer partícula fluida do fluido,**

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$



Velocidade e posição de uma partícula fluida A num instante t.

▶ As componentes do campo aceleração

$$\mathbf{a}(t)=\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\mathbf{a}(t)=\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}+w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Universidade Federal do ABC

Derivada Material ou Substantiva

- **O resultado,** $\mathbf{a}(t) = \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$

- **É muitas vezes escrito como** $\mathbf{a}(t) = \dfrac{D\mathbf{V}}{Dt}$

onde,

$$\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + u\frac{\partial(\ )}{\partial x} + v\frac{\partial(\ )}{\partial y} + w\frac{\partial(\ )}{\partial z} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + (\mathbf{V} \bullet \nabla)(\ )$$

Sendo,

$$(\mathbf{V} \bullet \nabla)(\ ) = u\frac{\partial(\ )}{\partial x} + v\frac{\partial(\ )}{\partial y} + w\frac{\partial(\ )}{\partial z}$$

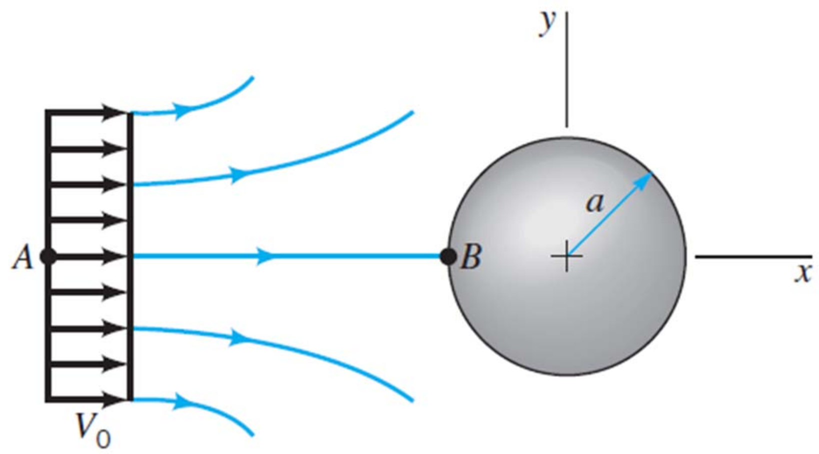
É denominada derivada material ou substantiva.

Exemplos

1) A figura abaixo mostra um escoamento incompressível, invísicido e de regime permanente de um fluido ao redor de uma esfera de raio a. De acordo com uma análise mais avançada deste escoamento, a velocidade do fluido ao longo da linha de corrente entre os pontos A e B é dada por

$$\mathbf{V} = u(x)\,\mathbf{i} = V_0\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)\mathbf{i}$$

Onde V_0 é a velocidade longe da esfera. Determine a aceleração imposta numa partícula fluida enquanto ela escoa ao longo da dessa linha de corrente.



Solução

$$\mathbf{V} = u(x)\,\mathbf{i} = V_0\left(1+\frac{a^3}{x^3}\right)\mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad v = \omega = 0$$

Daí,

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\mathbf{i} + u\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i}$$

Separadamente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad e \quad u\frac{\partial u}{\partial x} = V_0\left(1+\frac{a^3}{x^3}\right)\left(-3V_0\frac{a^3}{x^4}\right) = -\frac{3V_0^2}{a}\left[\frac{1+(a/x)^3}{(a/x)^4}\right]$$

Assim,

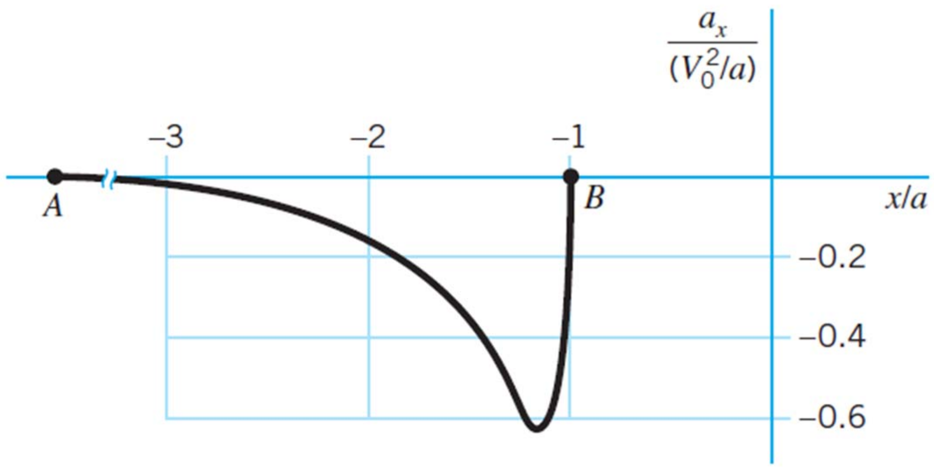
$$\mathbf{a} = -\frac{3V_0^2}{a}\left[\frac{1+(a/x)^3}{(a/x)^4}\right]\mathbf{i}$$

Continuando

$$Se \quad \mathbf{a} = -\frac{3V_0^2}{a}\left[\frac{1+(a/x)^3}{(a/x)^4}\right]\mathbf{i} \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{3V_0^2}{a}\left[\frac{1+(a/x)^3}{(a/x)^4}\right], \; a_y = a_z = 0$$

► **O gráfico a seguir mostra a variação da aceleração ao longo do eixo x. É possível verificar que a aceleração máxima ocorre para x = -1,205*a*, e seu maior valor em módulo é**

$$a_{max} = \left| -\frac{0{,}61}{a} V_0^2 \right|$$



2) Considere o campo de escoamento bidimensional, e em regime permanente, cujo campo de velocidade é dado por,

$$\mathbf{V} = \frac{V_0}{\ell}(x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j})$$

Determine o campo de aceleração deste escoamento.

Universidade Federal do ABC

Solução

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$$

$$u = \frac{V_0}{\ell}x, \quad v = -\frac{V_0}{\ell}y, \quad w = 0 \quad e \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

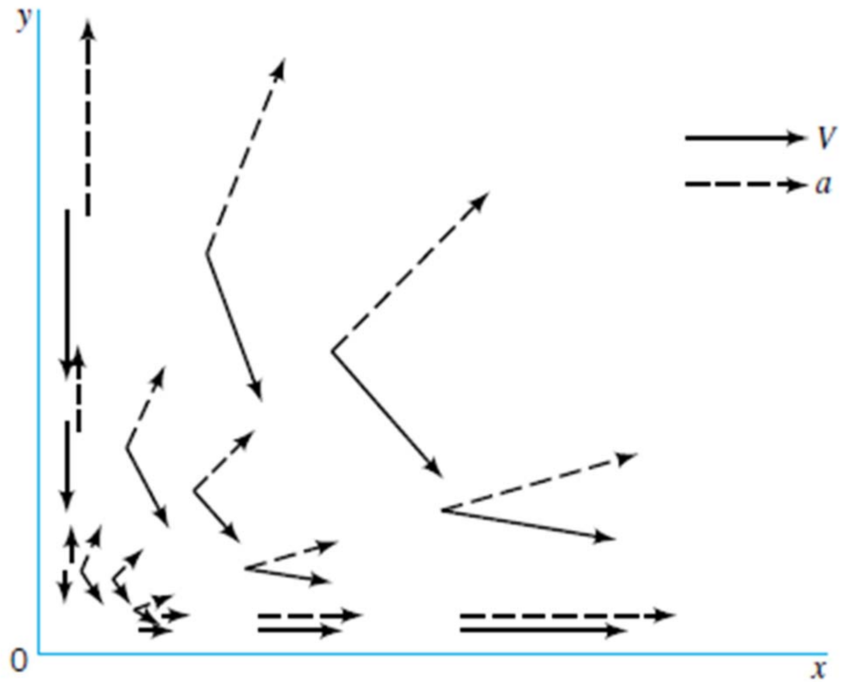
Assim,

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} &= \frac{V_0}{\ell}x\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V_0}{\ell}x\right)\right]\mathbf{i} = \frac{V_0^2 x}{\ell^2}\mathbf{i} \\ v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} &= -\frac{V_0}{\ell}y\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{V_0}{\ell}y\right)\right]\mathbf{j} = \frac{V_0^2 y}{\ell^2}\mathbf{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{V_0^2}{\ell^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Continuando,

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{V_0^2 x}{\ell^2}\mathbf{i} \\ a_y &= \frac{V_0^2 y}{\ell^2}\mathbf{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{V_0^2}{\ell^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{y}{x}$$



► **a é radial!**

Universidade Federal do ABC

4.2.2 Efeitos transitórios

► **A aceleração de uma partícula fluida A,**

$$\mathbf{a}(t) = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}}_{\text{Este termo envolve derivadas temporais}} + \underbrace{u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}}_{\text{Estes termos envolvem derivadas espaciais.}}$$

► **O termo $\partial V / \partial t$ é chamado de aceleração local e encerra os efeitos da transitoriedade do escoamento.**

4.2.2 Efeitos Convectivos

► **A aceleração de uma partícula fluida A,**

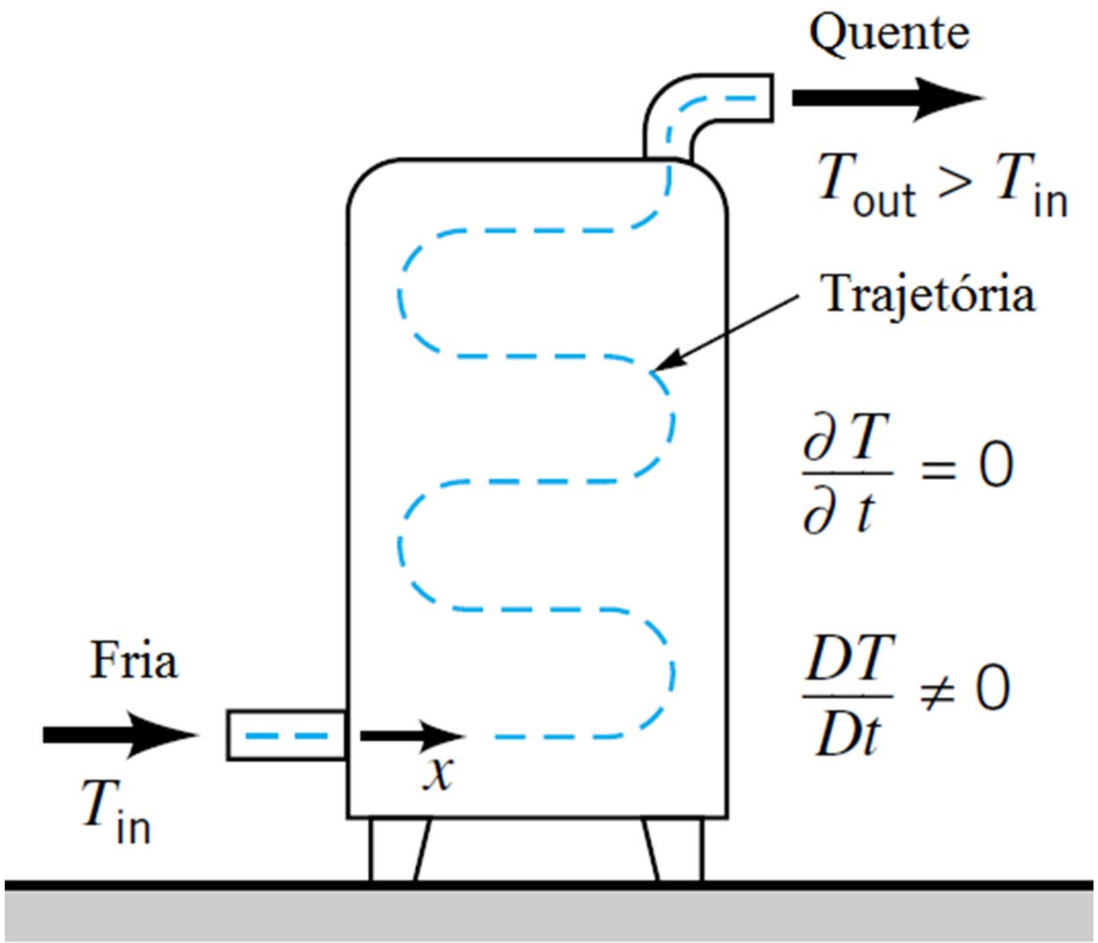
$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}}$$

Corresponde à porção da aceleração denominada de convectiva.

► **A aceleração convectiva está relacionada com a variação dos parâmetros devido à convecção, ou movimento da partícula no campo de escoamento no qual há um gradiente deste parâmetro.**

Exemplos

1) Aquecedor de água.



2) Escoamento em um tubo (unidimensional).

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

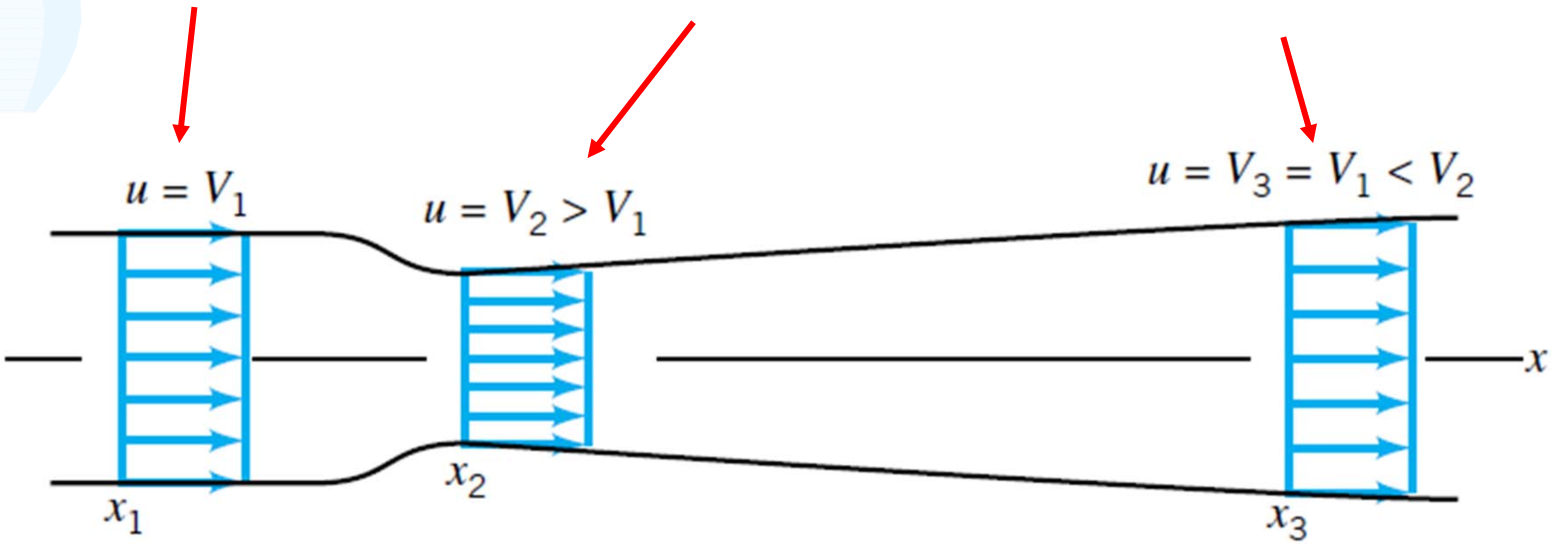
diâmetro fixo

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

redução do diâmetro

$$a_x = u\frac{\partial u}{\partial x} < 0$$

aumento do diâmetro

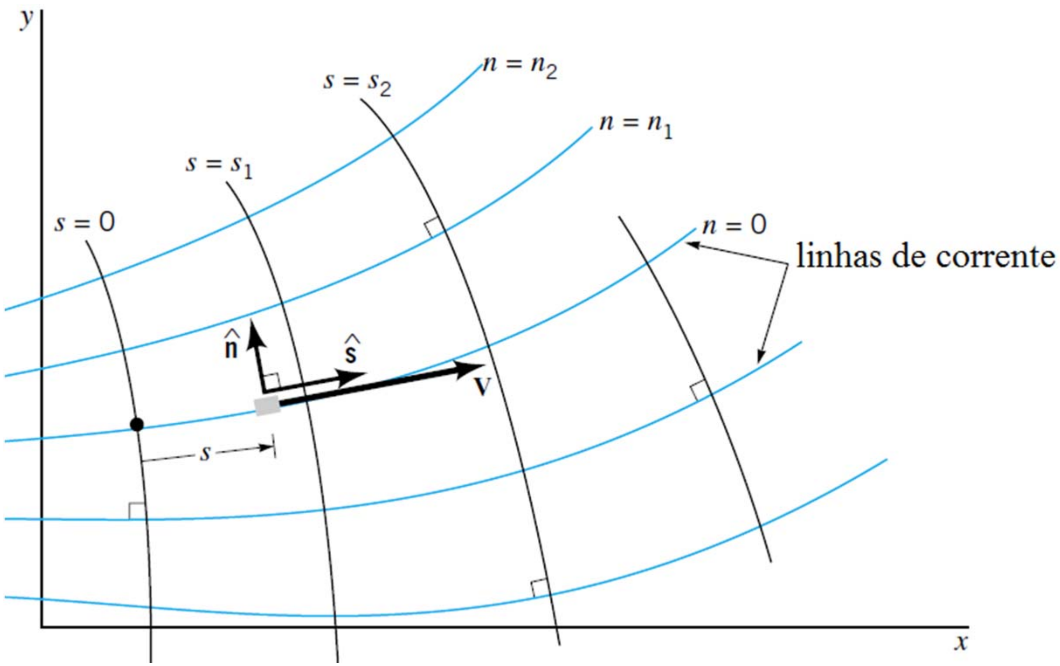


4.2.4 Coordenadas da Linha de Corrente.

► **Muitas vezes é conveniente escrever a aceleração de uma partícula fluida A no sistema de coordenadas (s,n) definido em função das linhas de corrente do escoamento.**

► **Neste caso,**

$$\mathbf{V} = V\,\mathbf{s}$$



▶ **A aceleração de um escoamento bidimensional e que ocorre em regime permanente pode ser, então, escrita em função das componentes s e n, que, de acordo com a seção 3.1 do capítulo 3, é**

$$\mathbf{a} = V\frac{\partial V}{\partial s}\mathbf{s} + \frac{V^2}{R}\mathbf{n}$$

▶ **Em componentes,**

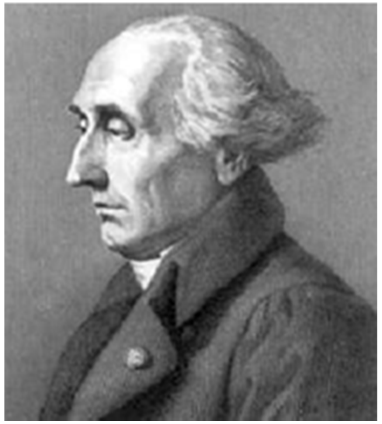
$$V\frac{\partial V}{\partial s} = a_s \quad \rightarrow$$

representa a aceleração convectiva ao longo da linha de corrente.

$$\frac{V^2}{R} = a_n \quad \rightarrow$$

representa a aceleração centrífuga normal à linha de corrente.

4.3 Sistemas e volumes de controle



► **Sistema de controle:**

É Certa quantidade de material com identidade fixa, que pode se mover, escoar e interagir com o meio.

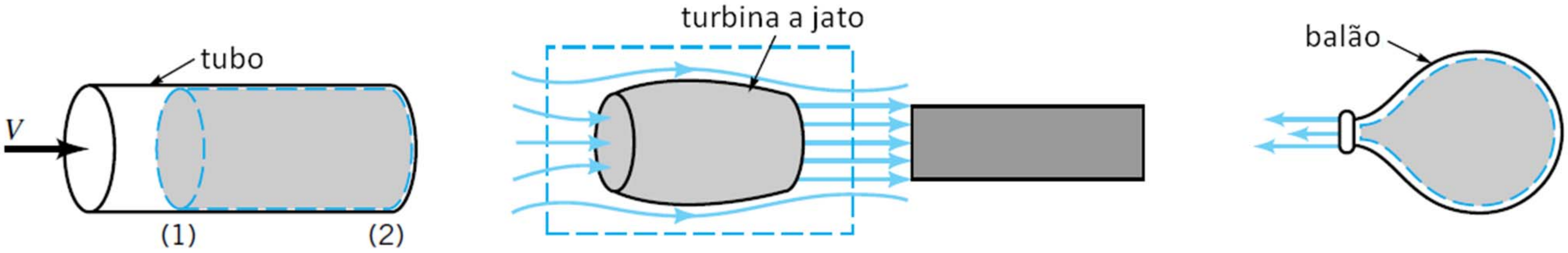
► **Volume de controle:**

Um volume no espaço fixo, cujas Propriedades são estudadas no tempo.

► **Nas investigações das interações de um fluido sobre um objeto (ventilador, avião, automóvel, etc), prática importante da Mecânica dos Fluidos, sempre é necessário identificar um volume associado ao corpo.**

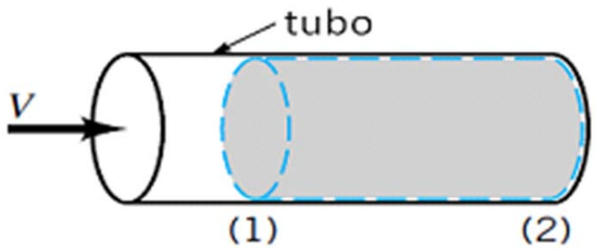
► **Portanto, a análise de um escoamento a partir de um volume de controle é, em geral, mais adequada.**

Exemplos

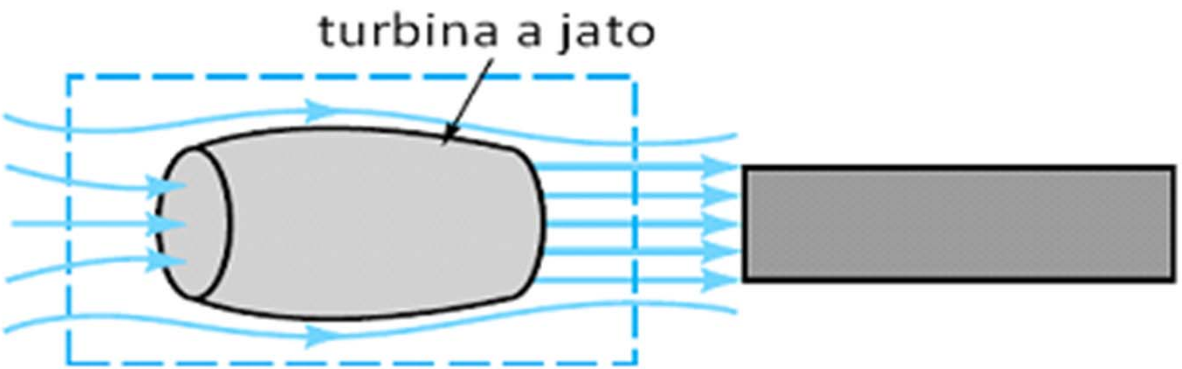


► **Vamos discuti-los...**

► **Escoamento de um fluido em um tubo. O volume de controle é formado pela superfície interna do tubo e pelas seções (1) e (2).** **É um volume de controle fixo**

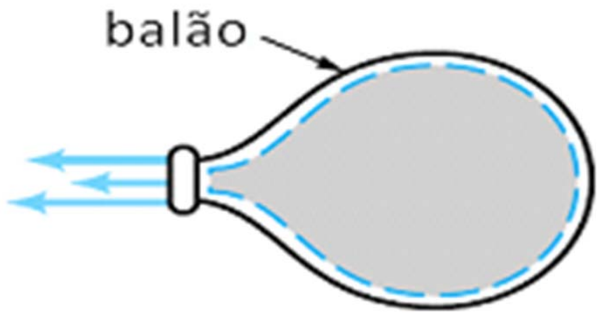


► **Escoamento ao redor de uma turbina de avião. O volume de controle engloba toda a turbina (linha tracejada).** **Se o avião está se movimentando, o volume de controle é fixo para um observador solidário ao avião, e móvel para um observador fixo à terra.**



▶ **Escoamento de ar de um balão esvaziando. O volume de controle é a superfície interna do balão, que dimi-nui com o tempo.**

É um volume de controle deformável.



▶ **Todas as leis matemáticas que modelam o movimento dos fluidos foram formuladas para a abordagem de sistemas. Por exemplo,**

- **Conservação da massa de um sistema;**
- **Taxa de variação do momento linear igual à Resultante das forças sobre um sistema;**
- **Etc.**

▶ **Por esse motivo, é importante converter esses modelos (e suas equações) para a abordagem via volumes de controle.**

4.4 Teorema da transformação de Reynolds

► **Princípio fundamental do teorema,**

Modelos Matemáticos p/ abordagem de escoamentos via sistemas ⇒ **Teorema da transformação de Reynolds** ⇒ **Modelos Matemáticos p/ abordagem de escoamentos via volume de controle**

Definições importantes

► **Em geral, as leis físicas são formuladas em função de vários parâmetros físicos. Por exemplo, seja B um parâmetro físico e b a quantidade deste parâmetro por unidade de massa. Então,**

$$B = mb$$

Onde m é a massa do sistema.

Propriedades extensivas e intensivas

▶ **Propriedade intensiva, b: não depende do tamanho do sistema. Por exemplo, densidade, calor específico, temperatura.**

▶ **Propriedade extensiva, B_{sis}: depende do tamanho do sistema. Por exemplo, massa, volume, momento angular.**

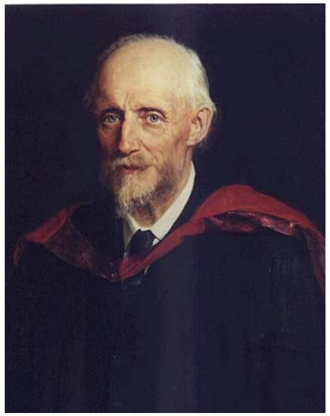
▶ **Em geral, uma propriedade extensiva de um sistema, B_{sis}, é determinada pela somatória da quantidade intensiva, b, associada a cada partícula de volume *δV* e a massa *ρδV*. Isto é,**

$$B_{sis} = \lim_{\delta V \to 0} \sum_i b_i (\rho_i \delta V_i) = \int_{sis} \rho b dV$$

▶ **O volume de integração cobre todo o sistema, usualmente, um volume de controle.**

Teorema de Reynolds

► ***"A taxa de variação de uma propriedade extensiva, B, de um fluido em um volume de controle é expressa em termos da derivada material."***



Osborne Reynolds
(1842–1912)

► **Estabelece uma ligação entre os conceitos ligados aos volumes de controles àqueles ligados aos sistemas.**

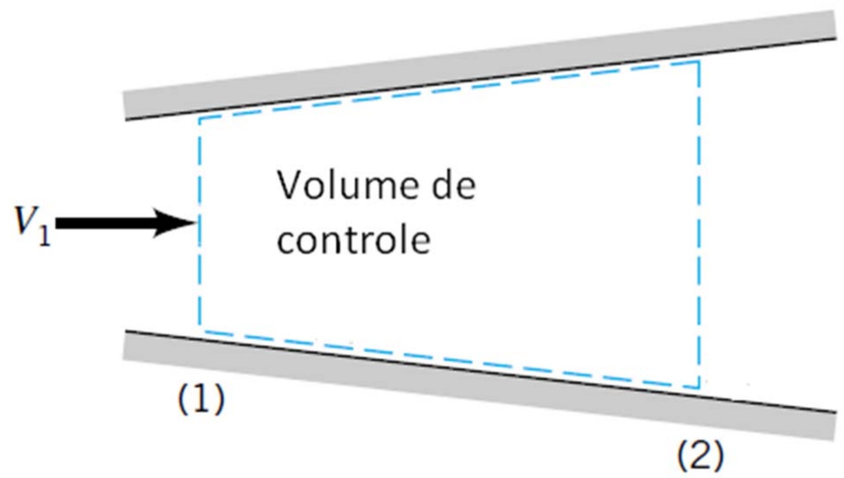
Modelos Matemáticos p/ abordagem de escoamentos via sistemas ⇒ **Teorema da transformação de Reynolds** ⇒ **Modelos Matemáticos p/ abordagem de escoamentos via volume de controle**

Dedução do Teorema

► **Análise de um escoamento unidimensional através de um volume fixo.**

Considerações:

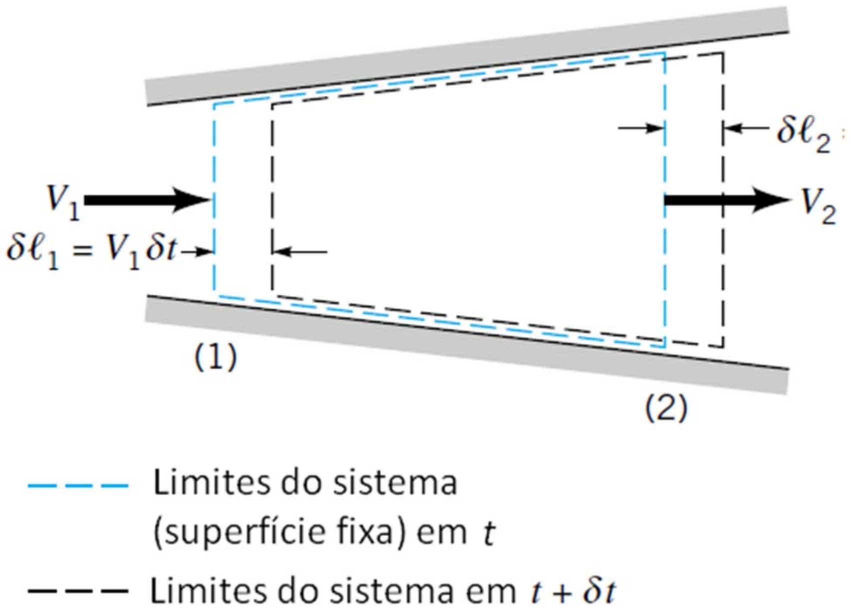
- **O volume de controle é estacionário;**
- **O sistema é o fluido que ocupa o volume no instante *t*;**
- **As velocidades são normais às superfícies (1) e (2).**



Universidade Federal do ABC

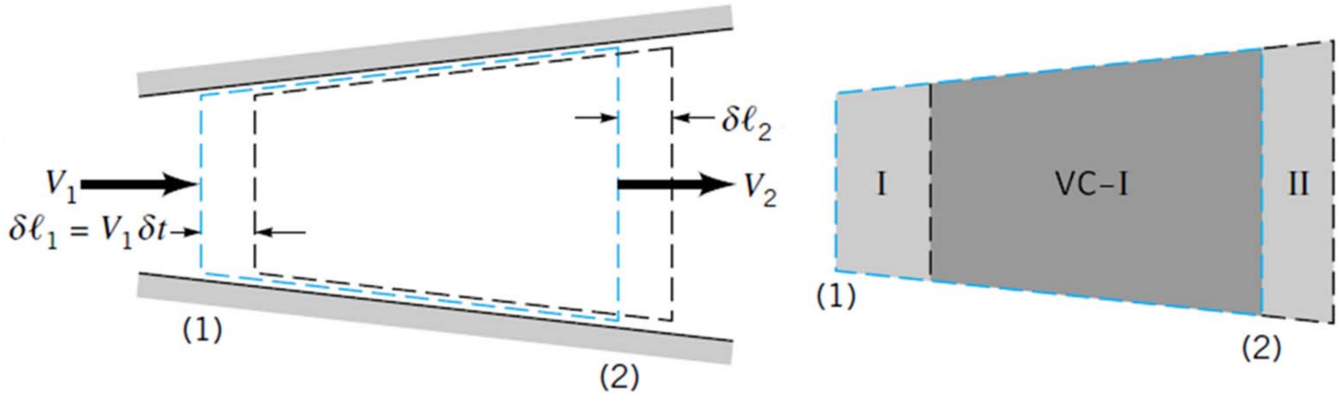
► **Após um intervalo de tempo δt, o sistema se desloca para direita.**

- **A seção (1) se desloca de $\delta\ell_1 = V_1\,\delta t$;**
- **A seção (1) se desloca de $\delta\ell_2 = V_2\,\delta t$;**



► **O escoamento para fora do volume de controle em *t* + δt é denominado volume II.**

► **O escoamento para dentro do volume de controle em *t* + δt é denominado volume I.**



► **Assim, o sistema no instante *t* consiste no volume VC (linha pontilhada azul). No instante *t* + δt é (VC – I) + II.**

► **O volume de controle permanece VC o tempo todo.**

▶ **Seja B uma propriedade extensiva do sistema. Então, teremos:**

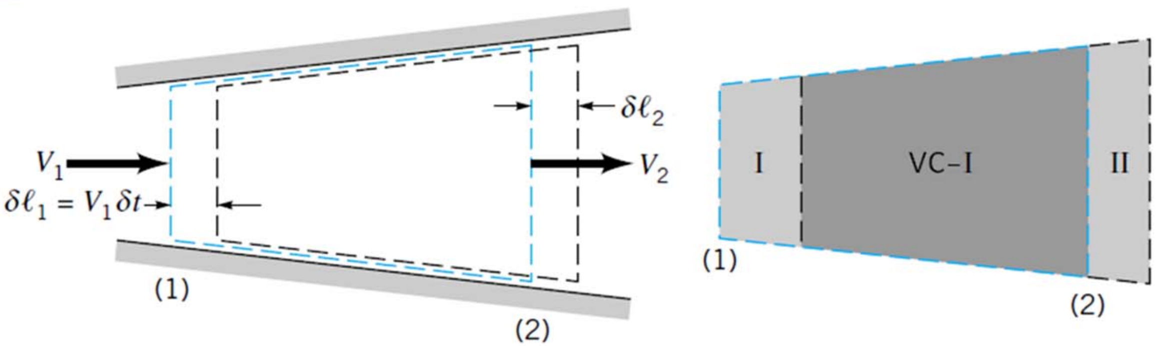
- **Antes:** $B_{SIS}(t) = B_{VC}(t)$

- **Depois:** $B_{SIS}(t+\delta t) = B_{VC}(t+\delta t) - B_{I}(t+\delta t) + B_{II}(t+\delta t)$

- **A variação de B durante δt vale:**

$$\frac{\delta B_{SIS}}{\delta t} = \frac{B_{SIS}(t+\delta t) - B_{SIS}(t)}{\delta t} =$$

$$= \frac{B_{VC}(t+\delta t) - B_{I}(t+\delta t) + B_{II}(t+\delta t) - B_{SIS}(t)}{\delta t}$$



- **Daí,**

$$\frac{\delta B_{\mathrm{SIS}}}{\delta t} = \frac{B_{\mathrm{VC}}(t+\delta t) - B_{\mathrm{I}}(t+\delta t) + B_{\mathrm{II}}(t+\delta t) - B_{\mathrm{SIS}}(t)}{\delta t}$$

- **Como** $B_{\mathrm{SIS}}(t) = B_{\mathrm{VC}}(t)$ **, então,**

$$\frac{\delta B_{\mathrm{SIS}}}{\delta t} = \frac{B_{\mathrm{VC}}(t+\delta t) - B_{\mathrm{VC}}(t)}{\delta t} - \frac{B_{\mathrm{I}}(t+\delta t)}{\delta t} + \frac{B_{\mathrm{II}}(t+\delta t)}{\delta t}$$

- **Tomando o limite quando *δt* -> 0,**

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{B_{\mathrm{VC}}(t+\delta t) - B_{\mathrm{VC}}(t)}{\delta t} = \frac{\partial B_{\mathrm{VC}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC} \rho b dV \right)$$

É a taxa com a qual o parâmetro extensivo B escoa do volume de controle através da superfície de controle.

Universidade Federal do ABC

- **Obtemos, portanto,**

$$B_{\mathrm{I}}(t+\delta t)=\left(\rho_1 b_1\right)\delta V_{\mathrm{I}}=\rho_1 b_1 A_1 V_1 \delta t$$

$$B_{\mathrm{II}}(t+\delta t)=\left(\rho_2 b_2\right)\delta V_{\mathrm{II}}=\rho_2 b_2 A_2 V_2 \delta t$$

- **E as taxas com que essas grandezas variam no tempo:**

$$\dot{B}_{entra}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{B_{\mathrm{I}}(t+\delta t)}{\delta t}=\rho_1 b_1 A_1 V_1$$

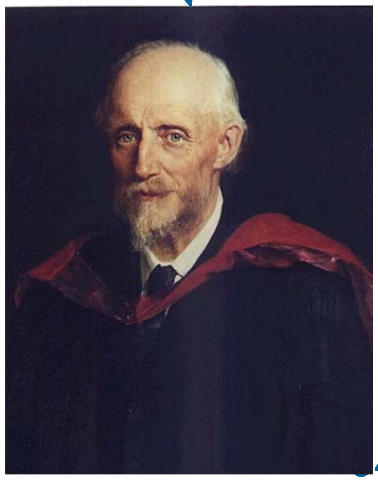
$$\dot{B}_{sai}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{B_{\mathrm{II}}(t+\delta t)}{\delta t}=\rho_2 b_2 A_2 V_2$$

► **Finalmente,**

$$\frac{DB_{\text{SIS}}}{Dt} = \frac{\partial B_{\text{VC}}}{\partial t} + \dot{B}_{sai} - \dot{B}_{entra}$$

$$\boxed{\frac{DB_{\text{SIS}}}{Dt} = \frac{\partial B_{\text{VC}}}{\partial t} + \rho_2 b_2 A_2 V_2 - \rho_1 b_1 A_1 V_1}$$

"A taxa de variação de uma propriedade extensiva, B, de um fluido em um volume de controle é expressa em termos da derivada material."

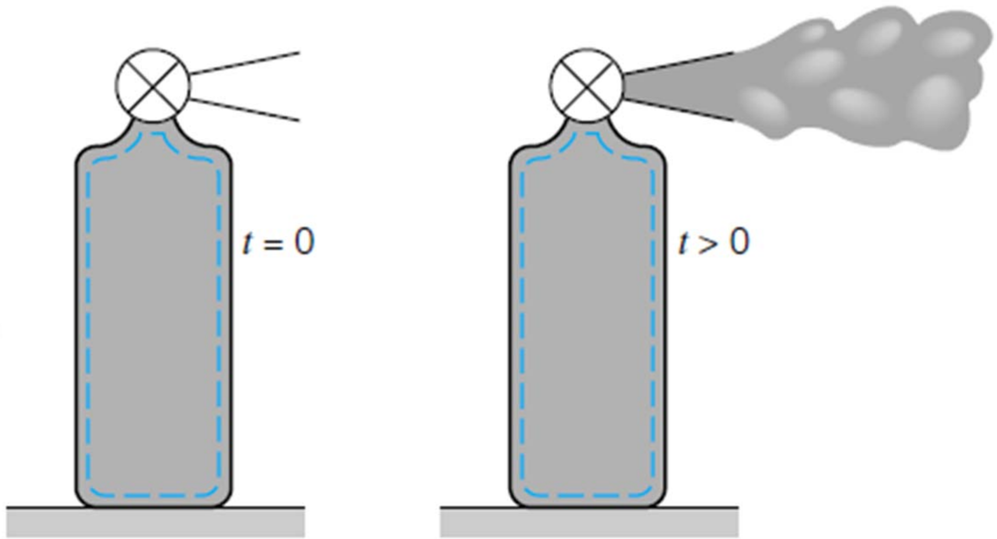


► **É importante notar que não é necessário que**

$$\dot{B}_{entra} = \dot{B}_{sai}$$

Exemplo

Considere o escoamento descarregado do extintor de incêndio mostrado na figura abaixo. Admita que a propriedade extensiva de interesse seja a massa do sistema (B = *m* é a massa do sistema, logo, b = 1). Escreva a forma apropriada do teorema de Reynolds para este escoamento.



Solução

► Em t = 0, o volume de controle coincide com o sistema. Além disso, não existe seção de alimentação. Portanto,

$$\rho_1 A_1 V_1 b_1 = 0$$

► Aplicando o teorema de Reynolds

$$\boxed{\frac{DB_{\mathrm{SIS}}}{Dt} = \frac{\partial B_{\mathrm{VC}}}{\partial t} + \rho_2 b_2 A_2 V_2 - \rho_1 b_1 A_1 V_1}$$

► Como $B_{Sis} = m$ e $b = 1$

$$\frac{Dm_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial m_{VC}}{\partial t} + \rho_2 b_2 A_2 V_2 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC} \rho dV\right) + \rho_2 A_2 V_2$$

Universidade Federal do ABC

► **Levando em conta que a quantidade de massa de um sistema é constante (sistema = todas as partículas do fluido), tem-se que,**

$$\frac{Dm_{SIS}}{Dt} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC} \rho dV\right) = -\rho_2 A_2 V_2 = \rho_2 Q_2$$

► **Interpretação: A taxa de variação temporal da massa no tanque (extintor) é igual à vazão em massa na seção de descarga.**

► **A unidade dos dois lados da equação é kg/s.**

► **Se existisse uma seção de alimentação, teríamos,**

$$\frac{Dm_{SIS}}{Dt} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC} \rho dV\right) + \rho_2 A_2 V_2 - \rho_1 A_1 V_1 = 0$$

► **Se o regime de escoamento for permanente,**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{VC} \rho dV\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_2 A_2 V_2 = \rho_1 A_1 V_1$$

► **Corresponde a uma das formas do princípio da conservação da massa. Outras formas serão discutidas no capítulo 5.**

Um pouco mais sobre o teorema de Reynolds

► A equação,

$$\boxed{\frac{DB_{\mathrm{SIS}}}{Dt} = \frac{\partial B_{\mathrm{VC}}}{\partial t} + \rho_2 b_2 A_2 V_2 - \rho_1 b_1 A_1 V_1}$$

Corresponde a uma forma simplificada do teorema de Reynolds.

► É possível derivar uma versão mais abrangente do teorema.

► A idéia básica é considerar uma propriedade extensiva do fluido, B, e procurar determinar a taxa de variação de B associada ao sistema e relacioná-la, em qualquer instante, com a taxa de variação de B no volume de controle.

► **Seguindo os mesmos passos semelhantes aos anteriores, chega-se a uma versão mais abrangente do teorema, dada por,**

$$\boxed{\frac{DB_{\mathrm{SIS}}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b \mathbf{V} \bullet \mathbf{n} dA}$$

Interpretações físicas

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} \rightarrow$$ **Representa a taxa de variação temporal de um parâmetro extensivo num sistema (massa, Q. movimento, etc.).**

► **Como o sistema está se movendo, e o volume de controle é estacionário, a taxa de variação da quantidade B no volume de controle não é necessariamente igual àquela do sistema.**

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho b dV \rightarrow$$

Representa a taxa de variação temporal de B num dado instante.

$$\int_{SV}\rho b \mathbf{V}\bullet\mathbf{n} dA \rightarrow$$

Representa a vazão líquida do parâmetro B através de toda a superfície de controle. Se V.n > 0, a propriedade B é transportada para fora do volume de controle. E se V.n<0, a propriedade entra no volume de controle. Se V.n = 0, tanto porque b = 0 ou V é nula, ou paralela à superfície de controle.

Observações finais

► **O volume de controle, a princípio, pode ser qualquer – finito ou infinito, mas uma escolha adequada pode simplificar o problema.**

► **Recomenda-se a leitura da seção 4.3 da referência - *Young.***