Universidade Federal do ABC

Capítulo 3 – Dinâmica dos Fluidos Elementar e Equação de Bernoulli

3.1 Princípios Fundamentais

Ao longo deste capítulo, consideraremos:

► **Um pequeno elemento de volume do fluido. Pequeno se comparado com as dimensões do fluido, porém com tamanho suficiente para conter um número razoável de moléculas. Esse elemento é chamado de partícula fluida.**

► **Escoamentos invíscidos (viscosidade nula).**

► **Aplicação da segunda Lei de Newton, F = *m*a ao movimento da partícula fluida.**

Conceitos Fundamentais

Escoamento

► Transporte de Massa num fluido no qual existe deslocamento de massa relativo de suas diversas partes.

► Ocorre, em geral, em condutos, mas também pode ocorrer em outros locais, como o movimento do ar atmosférico, por exemplo.

► Em um escoamento, organiza-se no fluido um campo vetorial de velocidades.

Escoamento Ideal ou Permanente

► Ocorre quando o fluido em movimento tem viscosidade nula.

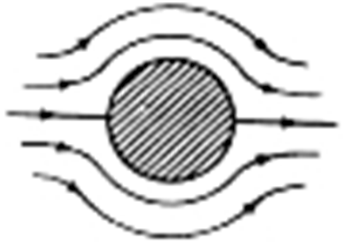
Linhas de corrente

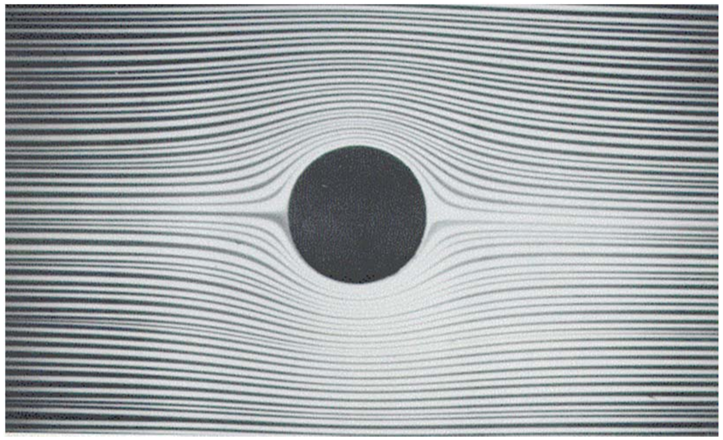
► **São linhas que, a cada ponto ocupado por uma partícula fluida num escoamento, são tangentes à velocidade. Isto é, tangentes ao vetor velocidade da partícula fluida.**

Outros Tipos de Escoamento (dependem da definição de linhas de corrente).

Estacionamento Laminar

► **Ocorrem quando as linhas são perfeitamente definidas e estacionárias ao longo do campo.**



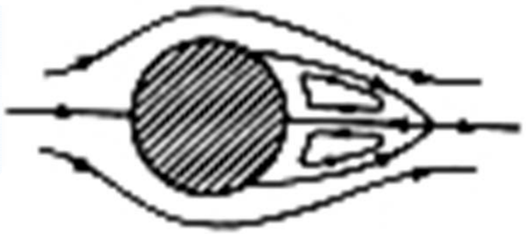


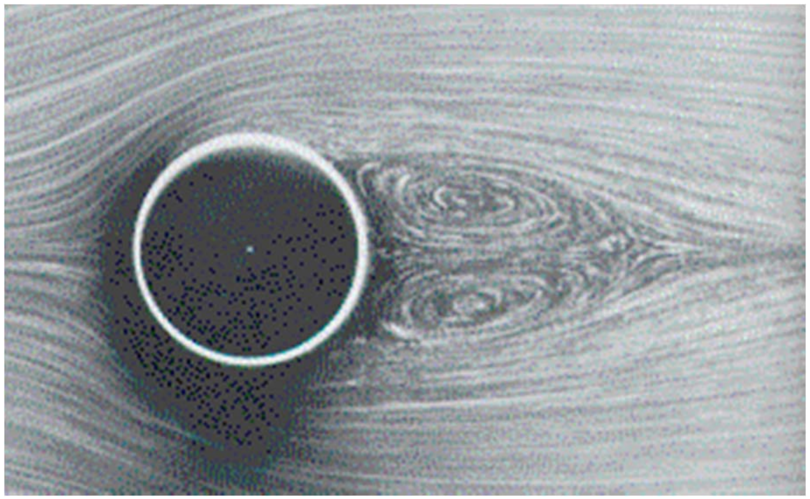
(vídeo 3.3)

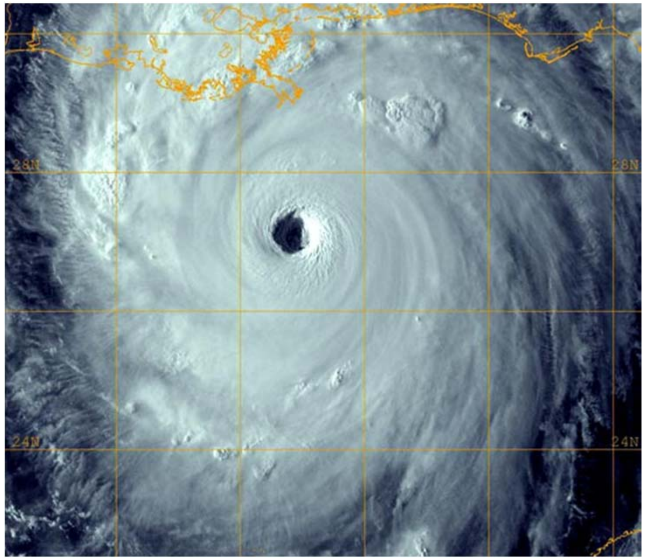
Escoamento turbilhonar ou turbulento

► **Ocorrem quando as linhas de corrente não são estacionarias.**

► **Forma-se, nesse caso, turbilhões (vórtices).**







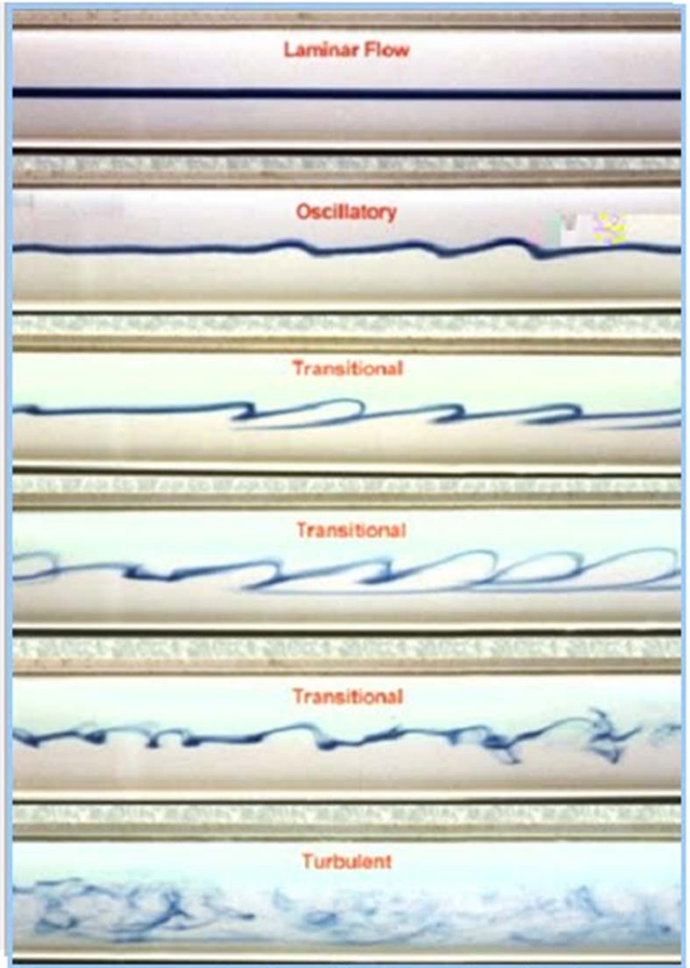
Furacão Katrina 25/08/2005

► A passagem do escoamento Laminar para o turbulento, num mesmo conduto ou região, para um mesmo fluido, ocorre para um valor crítico do número de Reynolds, Re, definido por

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

ρ é a massa específica do fluido, μ é a viscosidade dinâmica, V é a velocidade média do escoamento. D é o diâmetro do tubo.

(vídeo 3.2)



Escoamento laminar e turbulento

Universidade Federal do ABC

Escoamento Newtoniano

► É definido para os escoamentos nos quais a viscosidade é constante e diferente de zero.

► Nesse caso, se o escoamento é laminar há, no campo de velocidades, um gradiente da velocidade escalar proporcional à tensão de cisalhamento.

► O gradiente de velocidade varia linearmente na direção perpendicular às linhas de corrente.

Escoamento Plástico (não Newtoniano)

► Ocorre quando não há proporcionalidade entre a variação da velocidade e a tensão de cisalhamento.

► Só há escoamento, quando a tensão de cisalhamento ultrapassa um certo valor conhecido como ponto de cedência. A partir daí, pode ou não haver variação linear da velocidade com a tensão.

Escoamento Potencial

- **Ocorre quando o campo de velocidade do escoamento admite um potencial.**

- **Nesse caso, existe uma função potencial escalar, *A* tal que,**

$$\text{grad } A = -\vec{\mathbf{V}}$$

3.1 Aplicação da 2ª Lei de Newton

► De modo geral, uma partícula fluida sofre acelerações e desacelerações durante um escoamento.

► Como os escoamentos são invíscidos, o movimento do fluido é provocado pelas forças da gravidade e de pressão.

► Aplicando a segunda lei de Newton,

(Força líquida na partícula fluida devida a pressão)

+

(força na partícula fluida devida a gravidade)

=

(massa da partícula fluida) x (aceleração da partícula)

$$F_R = m\,a$$

$$F = ma$$

Pressão média sobre a partícula + **Força da gravitação média sobre a partícula** = **Massa da partícula** x **Aceleração da partícula**

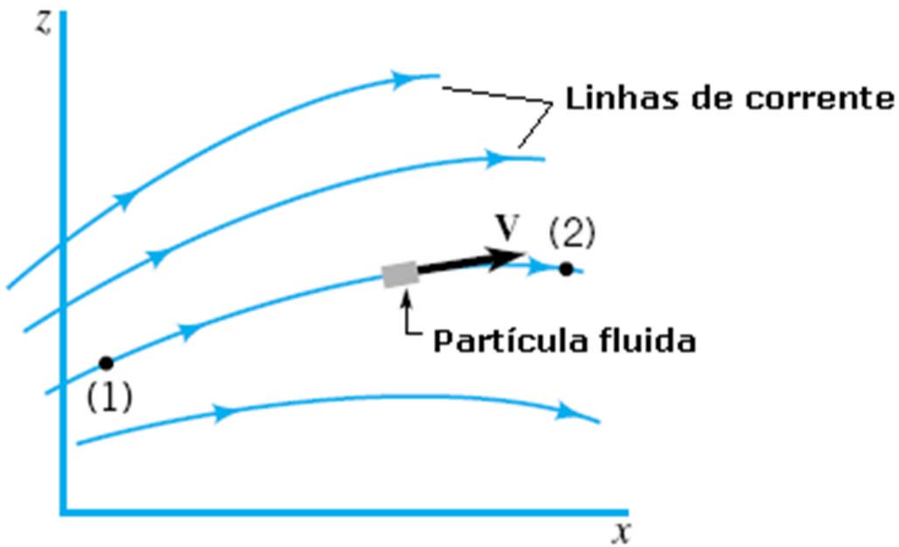
Universidade Federal do ABC

Descrevendo o movimento

► O movimento é descrito em função da velocidade da partícula fluida.

► Quando uma partícula fluida muda de posição, ela segue uma trajetória particular cuja forma é definida pela sua velocidade.

► As trajetórias são as linhas de corrente e são tangentes aos vetores velocidades das partículas em cada ponto. Ou seja, são tangentes aos vetores do campo em cada ponto.



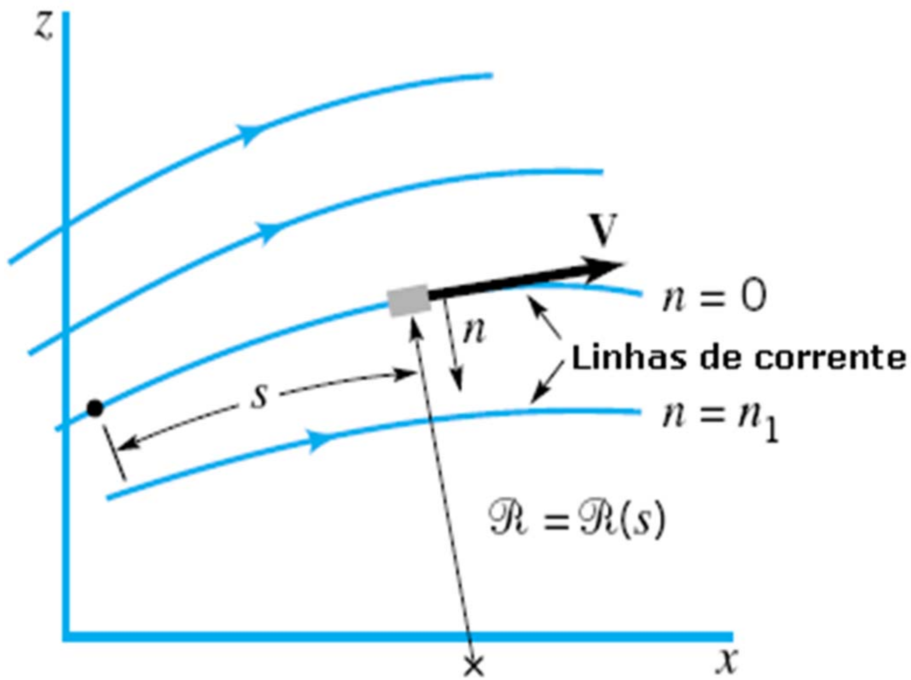
Definindo um novo referencial

► **Sistema s - n**

→ s = s(t) é a distância medida sobre a linha de corrente a partir de uma origem. O versor dessa coordenada, ŝ, tem a mesma direção da velocidade em cada ponto.

→ a direção n é definida pelo versor ň, perpendicular à linha de corrente em cada ponto do escoamento. Ele aponta para o centro da curva.

► **$R = R(s)$ é o raio de curvatura local da linha de corrente.**



▶ **A distância ao longo da linha de corrente está relacionada com a velocidade da partícula fluida.**

$$V = \frac{ds}{dt}$$

▶ **A aceleração ao longo da linha de corrente, a_s, é a derivada temporal da velocidade.**

$$a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} = V\frac{\partial V}{\partial s}$$

▶ **Por considerações físicas, a aceleração na direção perpendicular à linha de corrente é a aceleração centrífuga sobre a partícula.**

$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

→ ***V* e *R* (raio de curvatura) podem variar ao longo da trajetória.**

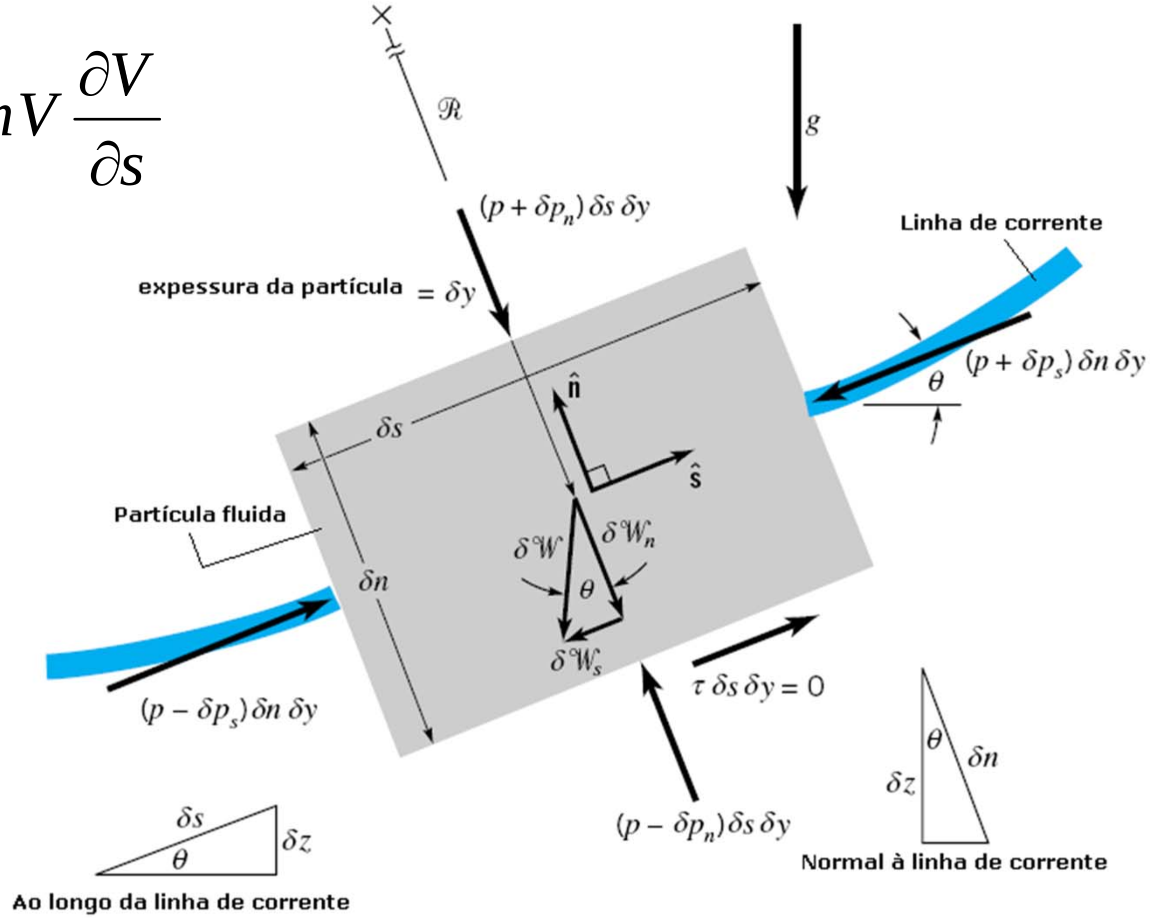
Universidade Federal do ABC

3.2 Aplicação da 2ª Lei de Newton ao longo da linha de corrente

$$\sum \delta F_S = \delta m a_S = \delta m V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\delta m = \rho \delta V$$

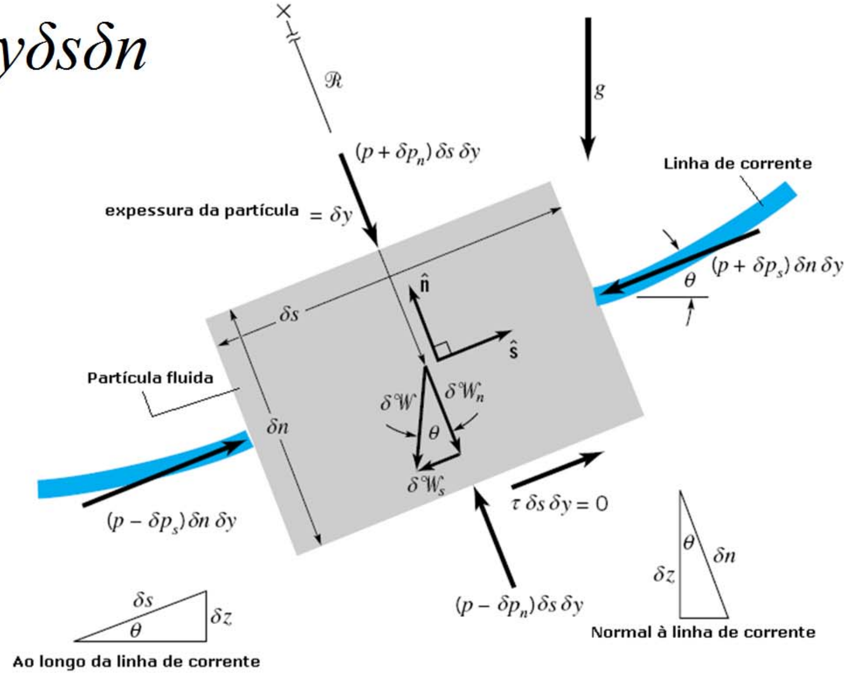
$$\sum \delta F_S = \rho \delta V V \frac{\partial V}{\partial s}$$



▶ **Volume da partícula,** $\delta V = \delta y \delta s \delta n$

▶ **Por outro lado,**

$$\sum \delta F_S = \delta W_S + \delta F_{PS}$$



Onde

$$\delta W_S = -\delta W \operatorname{sen}\theta$$

$$como\ \ \delta W = \delta m g \quad e \quad \delta m = \rho \delta V$$

$$Logo,$$

$$\delta W_S = -\rho \delta V\, g \operatorname{sen}\theta = -\gamma \delta V \operatorname{sen}\theta$$

Se o campo de velocidade do escoamento for horizontal, a força peso não contribui para a aceleração do fluido.

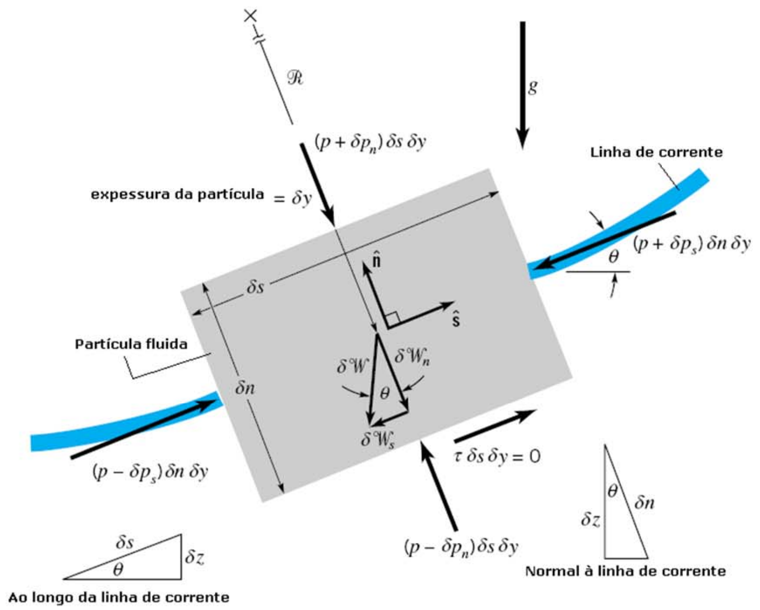
Análise da força devida à pressão

- **Pressão no centro da partícula,** p
- **Pressão na face esquerda,** $p - \delta p_s$
- **Pressão na face direita,** $p + \delta p_s$
- **Pressão na face superior,**

$$p + \delta p_n$$

- **Pressão na face inferior,**

$$p - \delta p_n$$



Expansão da pressão em série de Taylor

$$Expressão \quad geral \quad para \quad Série \quad de \quad Taylor$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \frac{\partial^n T(a)}{\partial x^n}$$

$$Para \quad a \quad pressão \quad ao \quad longo \quad da \quad linha \quad de \quad corrente \quad no \quad ponto \quad s - \delta s/2$$

$$p(s - \delta s/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[s-(s-\delta s/2)]^n}{n!} \frac{\partial^n p(s-\delta s/2)}{\partial s^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta s/2)^n}{n!} \frac{\partial^n p(s-\delta s/2)}{\partial s^n}$$

$$Expandindo \quad a \quad série \quad até \quad n = 1, \; e \; consideran \quad do \quad \delta s << 1,$$

$$p(s - \delta s/2) = p(s) - \frac{\delta s}{2} \frac{\partial p(s)}{\partial s}$$

$$Analogamen \quad te, \; no \quad ponto \quad s + \delta s$$

$$p(s + \delta s/2) = p(s) + \frac{\delta s}{2} \frac{\partial p(s)}{\partial s}$$

► **As pressões nas faces são obtidas por expansão da pressão em série de Taylor. Assim,**

$$\delta p_S = \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\delta s}{2}$$

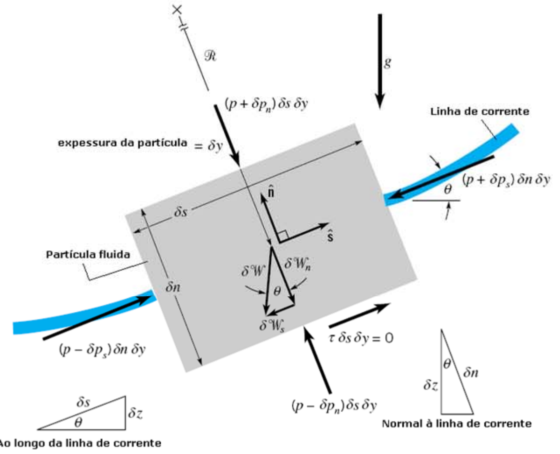
► **Força líquida devida à pressão na partícula sobre a linha de corrente**

$$\delta F_{PS} = (p - \delta p_s)\delta n \delta y - (p + \delta p_s)\delta n \delta y$$

$$\delta F_{P_S} = -2\delta p_s \delta n \delta y = -2\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\delta s}{2}\delta n \delta y$$

Assim,

$$\delta F_{P_S} = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta s \delta n \delta y = -\frac{\partial p}{\partial s}\delta V$$



Universidade Federal do ABC

Assim,

$$\sum \delta F_S = \delta W_S + \delta F_{PS} = \rho \delta \mathcal{V} V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$\delta W_S = -\gamma \delta \mathcal{V} \operatorname{sen} \theta$$

$$\delta F_{PS} = -\frac{\partial p}{\partial s} \delta \mathcal{V}$$

Portanto,

$$-\gamma\, \delta \mathcal{V} \operatorname{sen} \theta - \frac{\partial p}{\partial s} \delta \mathcal{V} = \rho \delta \mathcal{V} V \frac{\partial V}{\partial s}$$

$$-\gamma \operatorname{sen} \theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$$

▶ **A equação**

$$-\gamma \,\text{sen}\,\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$$

É válida para escoamentos permanentes, invíscidos e incompressíveis ao longo da linha de corrente.

Tem a seguinte interpretação física:

▶ **A variação da velocidade de uma partícula fluida é provocada por uma combinação adequada do gradiente de pressão com a componente do peso da partícula na direção da linha de corrente.**

▶ **Ainda pode ser escrita como,**

$$-\gamma \,\text{sen}\,\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho\, a_S$$

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial s} = \rho\, a_S$$

$$-\gamma \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s} = \rho a_s$$

Força da gravitação média sobre a partícula + **Pressão média sobre a partícula** = **Massa da partícula** X **Aceleração da partícula**

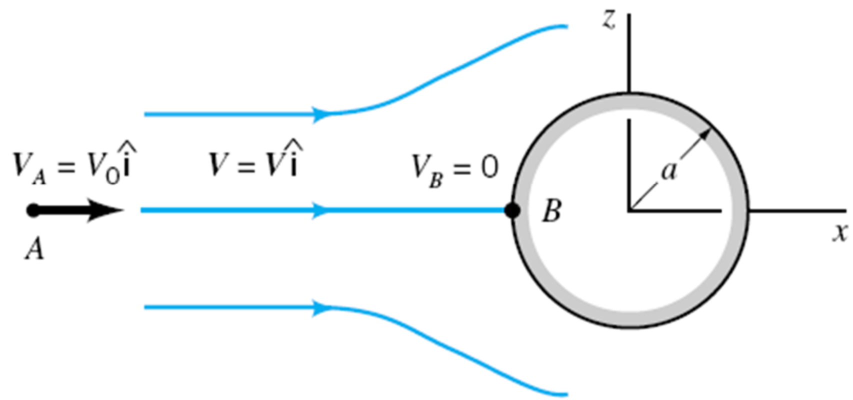
- **Uma mudança na velocidade da partícula implica numa combinação apropriada do gradiente de pressão e do peso da partícula ao longo da linha de corrente.**

Exemplo 3.1

A figura abaixo mostra algumas linhas de corrente do escoamento, em regime permanente, de um fluido invíscido e incompressível em torno de uma esfera de raio *a*. Sabe-se, utilizando um tópico mais avançado de Mecânica dos Fluidos, que a velocidade ao longo da linha de corrente A-B é dada por

$$V = V_0\left(1+\frac{a^3}{x^3}\right)$$

Determine a variação da pressão entre os pontos A (x_A= -∞ e V_A=V_o) e B (x_B= -*a* e V_B=0) da linha de corrente mostrada na figura.



Solução

Como o escoamento é permanente, invíscito e incompressível, a equação: $-\gamma \operatorname{sen}\theta - \dfrac{\partial p}{\partial s} = \rho V \dfrac{\partial V}{\partial s}$ *pode ser aplicada. E como o movimento ocorre apenas na direção x e esta coincide com a direção s, temos* $\theta = 0$ *e:*

$$\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx}$$

onde $V = V_o\left(1 + \dfrac{a^3}{x^3}\right)$ *e* $\dfrac{dV}{dx} = -V_o \dfrac{a^3}{x^4}$. *Daí,*

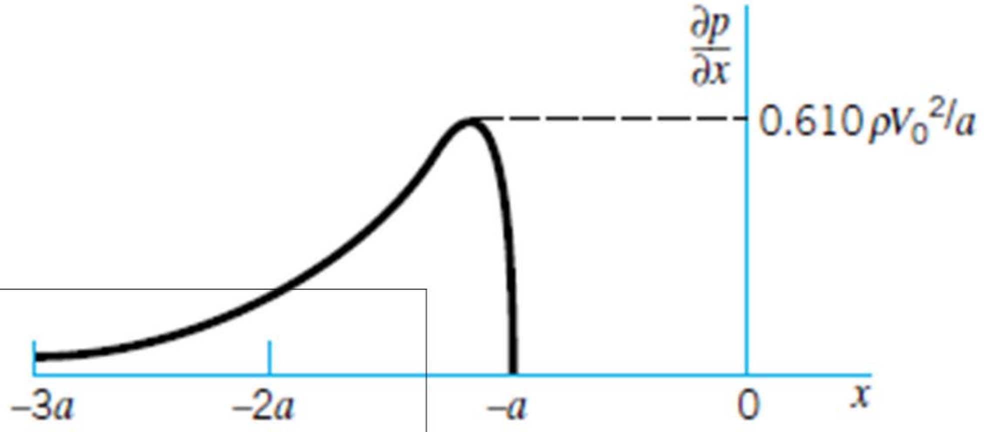
$$\frac{dp}{dx} = -\rho V_o\left(1 + \frac{a^3}{x^3}\right)\left(-3V_o \frac{a^3}{x^4}\right), \quad ou \quad \frac{dp}{dx} = 3\rho V_o^2 a^3\left(\frac{1}{x^4} + \frac{a^3}{x^7}\right)$$

Universidade Federal do ABC

Continuando

Fazendo o gráfico do gradiente de pressão versus a posição x,

$$\frac{dp}{dx} \times x,$$

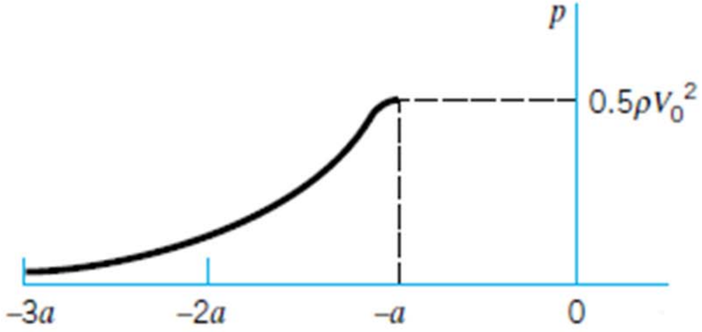


observamos que dp/dx *aumenta do ponto A para o ponto B* $(x_B = -a)$*, onde cai bruscamente.*

Continuação

Agora, integrando a equação

$$\frac{dp}{dx} = 3\rho V_o^2 a^3 \left(\frac{1}{x^4} + \frac{a^3}{x^7} \right), \textit{ vem}$$



$$\int_{p_A}^{p} \frac{dp}{dx} dx = 3\rho V_o^2 a^3 \left(\int_{x_A}^{x} \frac{dx}{x^4} + a^3 \int_{x_A}^{x} \frac{dx}{x^7} \right)$$

$$p - p_A = 3\rho V_o^2 a^3 \left(-\frac{1}{3x^3} - \frac{a^3}{6x^6} \right) \Bigg|_{x_A=-\infty}^{x} = 3\rho V_o^2 a^3 \left(-\frac{1}{3x^3} - \frac{a^3}{6x^6} \right)$$

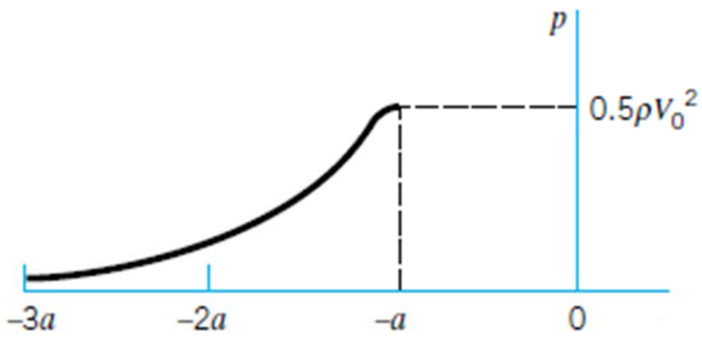
$$p - p_A = \Delta p = -\rho V_o^2 a^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{a^3}{2x^6} \right)$$

Continuação

Construindo o gráfico $\Delta p \times x$*, verifica-se que a pressão atinge um valor máximo em* $x_B = -a$*. Esse valor é*

$$\Delta p = -\rho V_o^2 a^3 \left(\frac{1}{(-a)^3} + \frac{a^3}{2(-a)^6} \right) = -\rho V_o^2 a^3 \left(-\frac{1}{a^3} - \frac{1}{2a^3} \right)$$

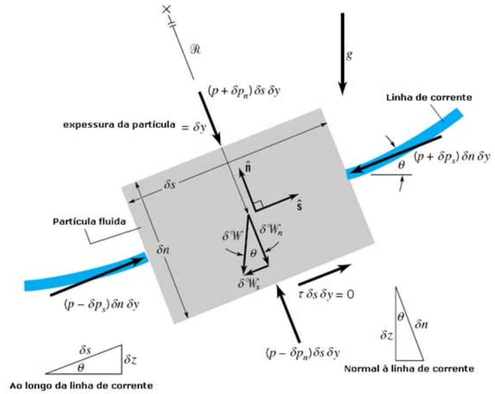
$$\Delta p = \rho \frac{V_o^2}{2}$$



A equação de Bernoulli

► **Considerando a equação** $-\gamma \operatorname{sen}\theta - \dfrac{\partial p}{\partial s} = \rho V \dfrac{\partial V}{\partial s}$

► **Notemos que ao longo da linha de corrente (trajetória da partícula fluida),**



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dz}{ds}$$

$$V\frac{\partial V}{\partial s} = V\frac{dV}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(V^2)$$

$$dn = 0 \quad (\textit{O vetor } \hat{\mathbf{n}} \textit{ é constante ao longo de uma linha de corrente})$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{ds}$$

- **Substituindo esses resultados em** $-\gamma \operatorname{sen}\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$

$$-\gamma \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds} = \rho\left[\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(V^2)\right]$$

$$\frac{dp}{ds} + \rho\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(V^2) + \gamma\frac{dz}{ds} = 0$$

$$\frac{dp}{ds}ds + \rho\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(V^2)ds + \gamma\frac{dz}{ds}ds = 0$$

Integrando,

$$\int\frac{dp}{ds}ds + \rho\frac{1}{2}\int\frac{d}{ds}(V^2)ds + \gamma\int\frac{dz}{ds}ds = 0$$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = \textit{constante ao longo da linha de corrente}$$

▶ **A equação**

$$p + \frac{1}{2}\rho V^{2} + \gamma z = constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

é a chamada equação de Bernoulli, válida ao longo da linha de corrente e para escoamentos invíscidos, permanentes e incompressíveis.

▶ **Apesar das restrições, é extremamente importante no contexto da Mecânica dos Fluidos.**

Universidade Federal do ABC

Observações sobre a equação de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

► **Corresponde a uma integração geral da segunda Lei de Newton, F = ma.**

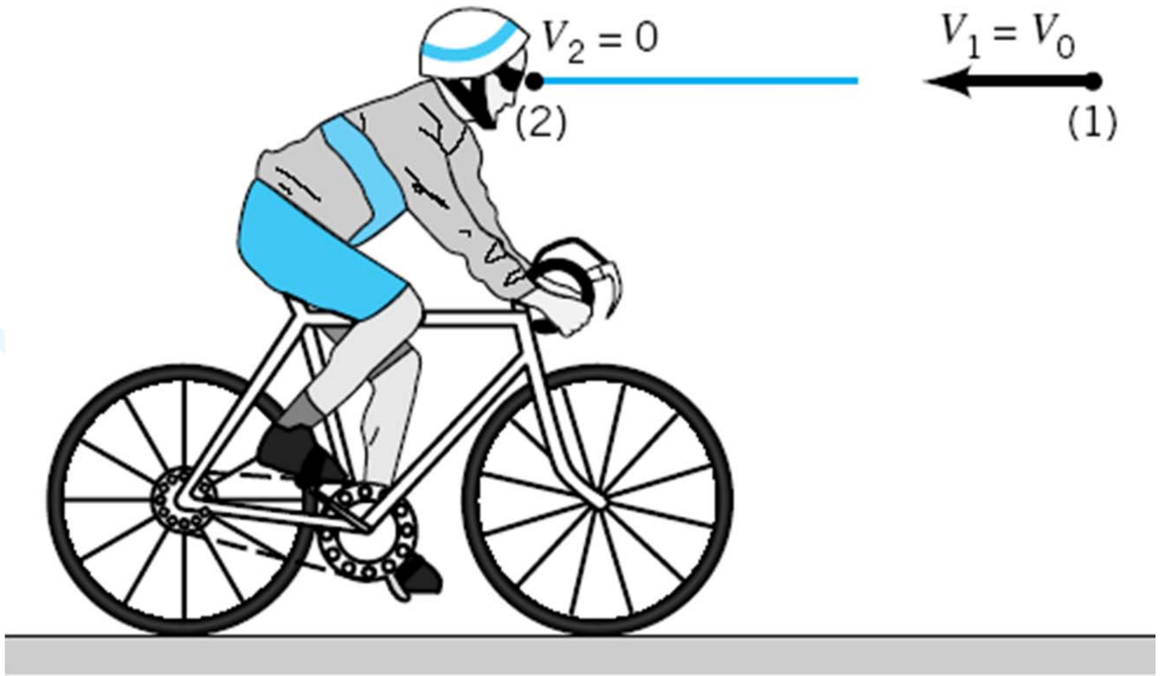
► **Não é necessário conhecer detalhadamente a distribuição de velocidades no escoamento para determinar a diferença de pressão entre dois pontos do escoamento.**

► **Porém, é preciso conhecer as condições de contorno nos pontos.**

► **É necessário, também, conhecer a variação de velocida-des ao longo da linha de corrente.**

Exercícios

1) Considere o escoamento de ar em torno de um ciclista que se move em ar estagnado com velocidade V_o (veja figura). Determine a diferença entre as pressões nos pontos (1) e (2) do escoamento. Considere que o ciclista tenha uma velocidade de 40km/h.



Solução

Para um sistema fixo ao ciclista, o escoamento é permanente e pode ser considerado com invíscito e incompressível. Então, podemos apricar a equação de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

Daí,

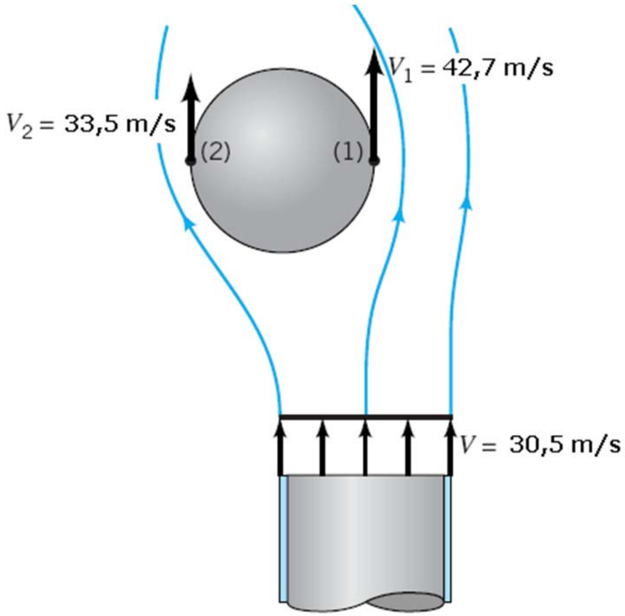
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

De acordo com os dados do problema: $z_1 = z_2$ *e* $V_2 = 0$ *e* $V_1 = V_o$. *Assim,*

$$p_2 - p_1 = +\frac{1}{2}\rho V_1^2 = \frac{1}{2}\rho V_o^2 = \frac{1}{2}\times 1{,}225\times(11{,}1)^2 = 75{,}47\ Pa$$

Exercícios

2) A figura abaixo mostra um jato de ar incidindo numa esfera (vídeo 3.1). Observe que a velocidade do ar na região próxima ao ponto 1 é maior do que aquela próxima ao ponto 2 quando a esfera não está alinhada com o jato. Determine, para as condições mostradas na figura, a diferença de pressão nos pontos 2 e 1. Despreze os efeitos gravitacionais. (Vídeo 3.1)

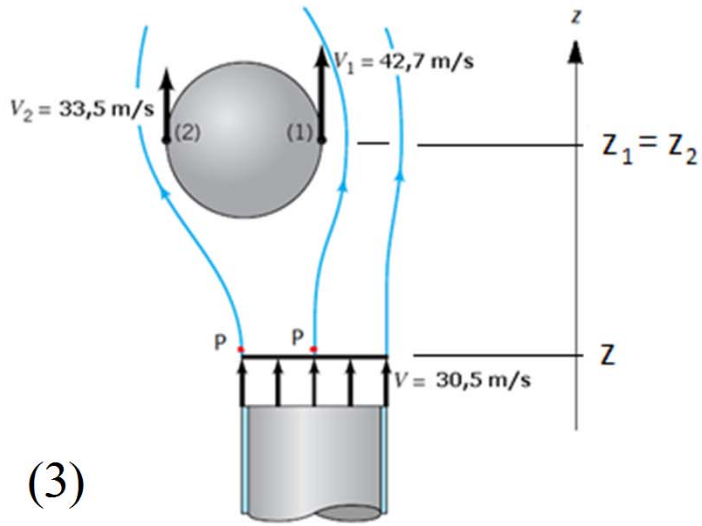


Solução

Consideremos os pontos Ps na saída do jato de ar, onde a velocidade é $V = 30\ m/s$ *e os pontos* 1 *e* 2 *nos quais as velocidades são* $V_1 = 42{,}7\ m/s$ *e* $V_2 = 33{,}5\ m/s$*, respectivamente. Podemos escrever, então,*

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 \qquad (1)$$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \gamma z = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 \qquad (2)$$



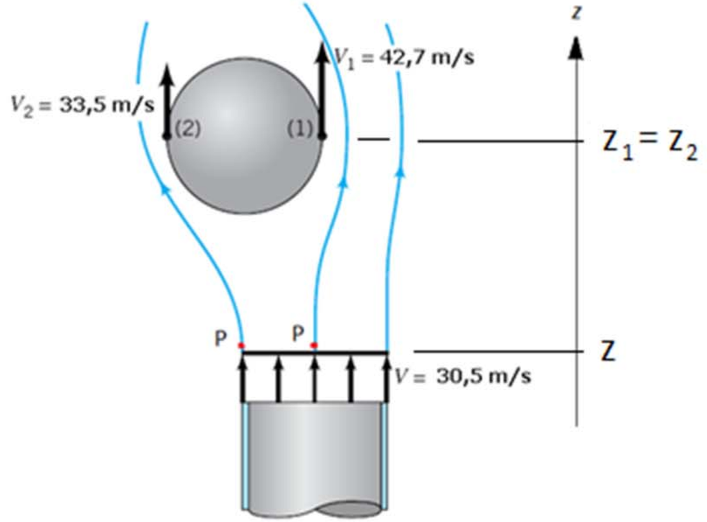
$$De\ (1),\ p_1 - p = \frac{1}{2}\rho(V^2 - V_1^2) + \gamma(z - z_1) \qquad (3)$$

$$De\ (2),\ p_2 - p = \frac{1}{2}\rho\left(V^2 - V_2^2\right) + \gamma\left(z - z_2\right) \qquad (4)$$

Solução

$$Fazendo: \quad (3) - (4),$$

$$\begin{cases} p_1 - p = \frac{1}{2}\rho(V^2 - V_1^2) + \gamma(z - z_1) \\ p_2 - p = \frac{1}{2}\rho\left(V^2 - V_2^2\right) + \gamma\left(z - z_2\right) \end{cases}$$



$$p_1 - p - p_2 + p = \frac{1}{2}\rho(V^2 - V_1^2) - \frac{1}{2}\rho\left(V^2 - V_2^2\right) + \gamma(z - z_1) - \gamma\left(z - z_2\right)$$

$$p_1 - p_2 = -\frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2) - \gamma(z_1 - z_2) \qquad cuidado\ com\ esta\ passagem!$$

De acordo com a figura, $z_1 = z_2$. *Logo,*

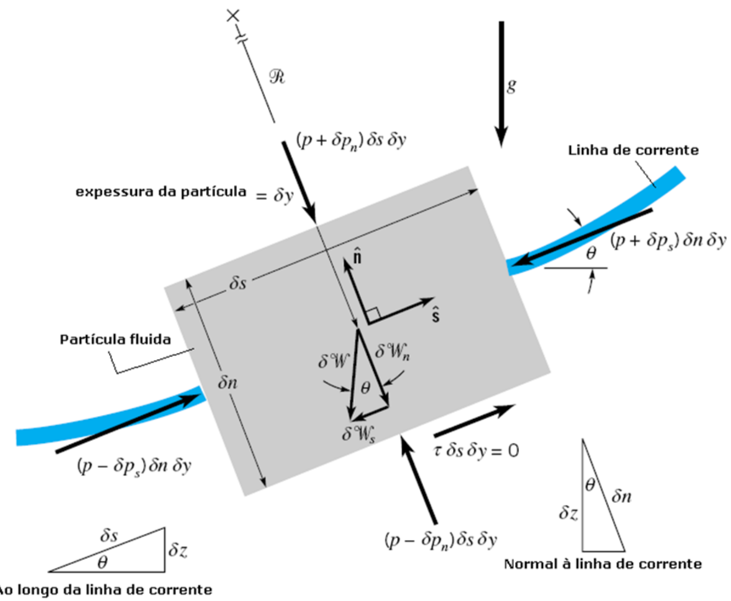
$$p_1 - p_2 = -\frac{1}{2}\rho(V_1^2 - V_2^2) = -\frac{1}{2} \times 1{,}225 \times (42{,}7^2 - 33{,}5^2) = -429{,}8\,Pa$$

3.3 Aplicação da 2ª Lei de Newton na direção normal a linha de corrente

► Como vimos anteriormente, a aceleração na direção **n** é a centrífuga. Isto é,

$$\sum \delta F_n = \delta m \frac{V^2}{R} = \rho\, \delta \mathcal{V} \frac{V^2}{R}$$

► Por outro lado, de acordo com a Figura à direita,



$$\sum \delta F_n = \delta W_n + \delta F_{Pn}$$

► Lembrando que estamos considerando que sobre a partícula fluida atuam apenas a força gravitacional e as de pressão.

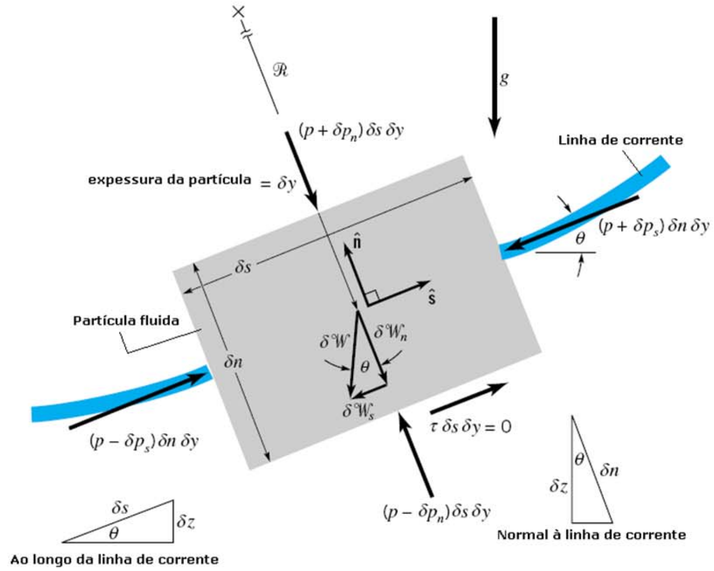
► Sendo,

$$\delta W_n = -\delta W \cos\theta$$

$$como\ \ \delta W = \delta mg \quad e \quad \delta m = \rho \delta V$$

Logo,

$$\delta W_n = -\rho \delta V\, g \cos\theta = -\gamma \delta V \cos\theta$$



► E, seguindo o mesmo raciocínio da seção 3.2,

$$\delta F_{Pn} = (p - \delta p_n)\delta s\, \delta y - (p + \delta p_n)\delta s\, \delta y$$

$$\delta F_{P_n} = -2\delta p_n \delta s\, \delta y = -2\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\delta n}{2}\delta s\, \delta y$$

Assim,

$$\delta F_{P_n} = -\frac{\partial p}{\partial n}\delta n\, \delta s\, \delta y = -\frac{\partial p}{\partial n}\delta V$$

- **Daí, temos**

$$\sum \delta F_n = \delta W n + \delta F_{Pn} = \rho \delta V \frac{V^2}{R}$$

$$\delta W_n = -\gamma \delta V \cos\theta$$

$$\delta F_{Pn} = -\frac{\partial p}{\partial n} \delta V$$

Portanto,

$$-\gamma \, \delta V \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial n} \delta V = \rho \delta V \frac{V^2}{R}$$

$$-\gamma \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R}$$

► **A equação**

$$-\gamma\cos\theta-\frac{\partial p}{\partial n}=\rho\frac{V^2}{R}$$

É válida para escoamentos permanentes, invíscidos e incompressíveis ao longo da direção perpendicular à linha de corrente.

► **Tem a seguinte interpretação física:**

A variação da velocidade de uma partícula fluida é provocada por uma combinação adequada do gradiente de pressão com a componente do peso da partícula na direção normal à linha de corrente.

- Agora, considerando a equação $-\gamma\cos\theta - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho\frac{V^2}{R}$

- Notemos que ao longo da direção normal à linha de corrente,

$$\cos\theta = \frac{dz}{dn}$$

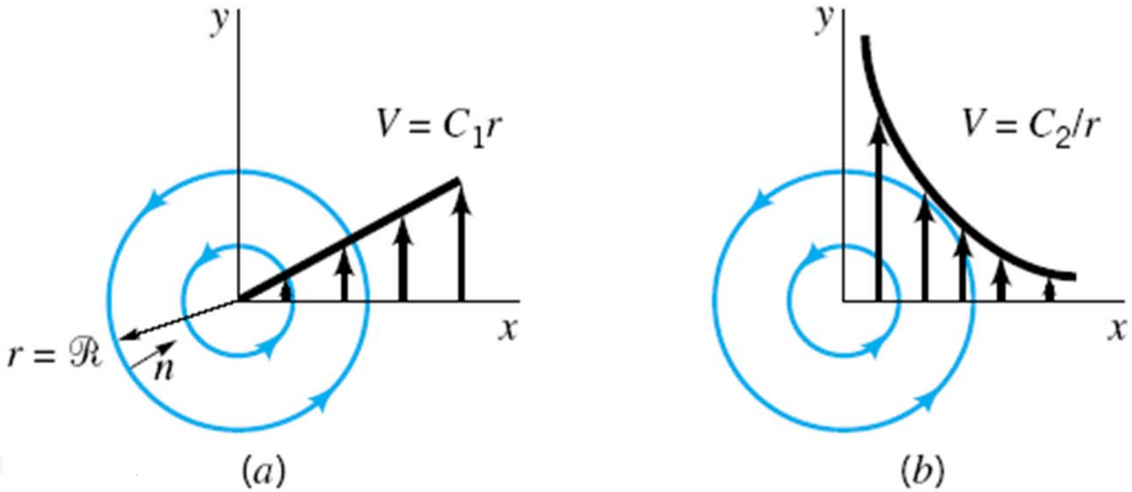
- Assim, obtemos

$$-\gamma\frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho\frac{V^2}{R}$$

Exercícios

A figura abaixo mostra dois escoamentos com linhas de correntes circulares. As distribuições de velocidade são

$$V(r) = C_1 r \qquad V(r) = \frac{C_2}{r}$$



Onde C_1 e C_2 são constantes. Determine a distribuição de pressões, $p = p(r)$, sabendo que $p = p_o$ em $r = r_o$.

Resolução

► **Ponderações:**

- Consideraremos o fluido invíscido, incompressível e com regime permanente.

- Supondo que as linhas permaneçam no plano xy, então, *dz/dn* = 0.

- n é oposto à direção radial, logo, $\frac{\partial}{\partial n} \equiv -\frac{\partial}{\partial r}$

- *R* = *r*.

► **Daí, considerando a equação** $-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R}$ **, vem que**

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{V^2}{r}$$

- **Para o caso (a),**

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{V^2}{r} = \rho \frac{(C_1 r)^2}{r} = \rho C_1^2 r$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\partial p}{\partial r} dr = \rho C_1^2 \int_{r_0}^{r} r dr$$

$$p - p_0 = \rho \frac{C_1^2}{2}(r^2 - r_0^2)$$

$$p = \rho \frac{C_1^2}{2}(r^2 - r_0^2) + p_0$$

- **Para o caso (b),**

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{V^2}{r} = \rho \frac{(C_2 / r)^2}{r} = \rho \frac{C_2^2}{r^3}$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\partial p}{\partial r} dr = \rho C_2^2 \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^3}$$

$$p - p_0 = -\rho \frac{C_2^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)$$

$$p = \rho \frac{C_2^2}{2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + p_0$$

▶ **Comparando os resultados**

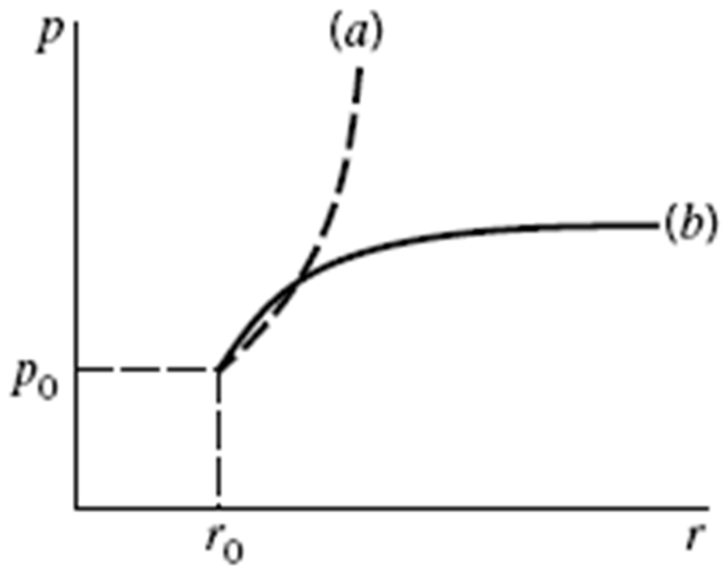
▶ **caso (a),**

$$p = \rho \frac{C_1^2}{2}(r^2 - r_0^2) + p_0$$

▶ **caso (b),**

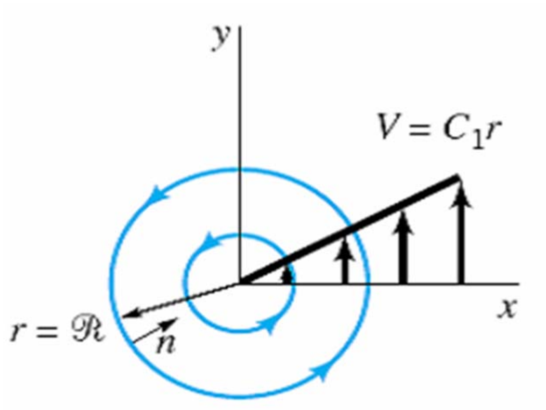
$$p = \rho \frac{C_2^2}{2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + p_0$$

▶ **Variação da pressão em função da distância radial, *r*, para os casos (a) e (b).**



▶ **No caso (a), a pressão aumenta indefinidamente,**

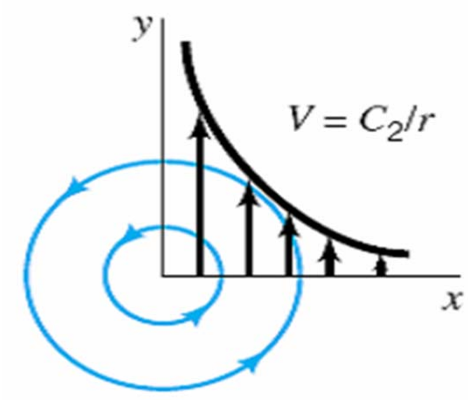
$$p = \rho \frac{C_1^2}{2}(r^2 - r_0^2) + p_0$$



▶ **Representa a rotação de um corpo rígido (um fluido no qual as tensões de cisalhamento são nulas).**

▶ **No caso (b), a pressão se aproxima de um valor finito quando $r \to \infty$, apesar das linhas de corrente serem iguais às do caso (a)**

$$p = \rho \frac{C_2^2}{2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + p_0$$



▶ **Representa um vórtice livre, que é a aproximação de um tornado ou água de pia.**

- **Voltando à análise da equação** $-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R}$

- **Integrando-a,**

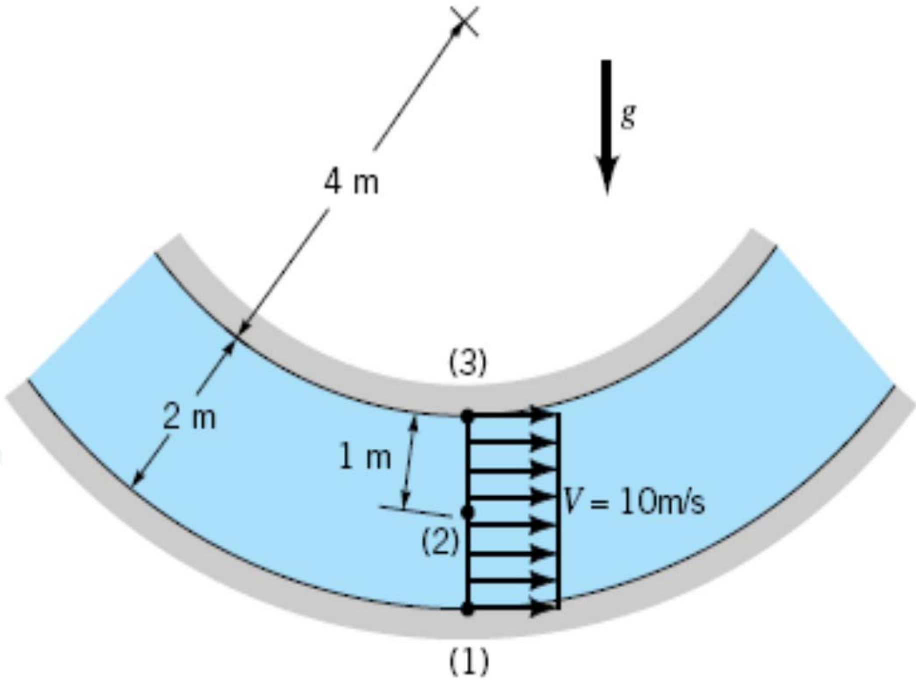
$$-\gamma \int \frac{dz}{dn} dn - \int \frac{\partial p}{\partial n} dn = \rho \int \frac{V^2}{R} dn$$

$$p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma z = Constante\ ao\ longo\ da\ direção\ normal$$

$$à\ linha\ de\ corrente$$

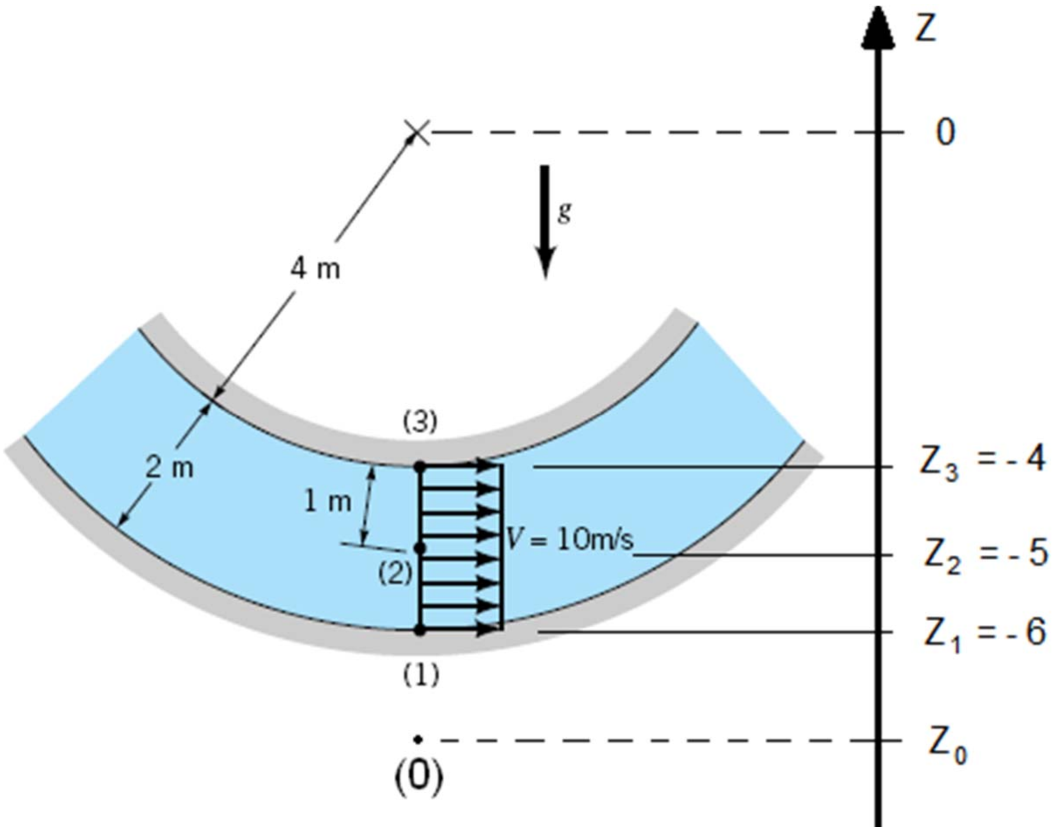
Exercício

A água escoa na curva bidimensional mostrada na figura abaixo. Note que as linhas de corrente são circulares e que a velocidade é uniforme no escoamento. Determine a pressão nos pontos (2) e (3) sabendo que a pressão no ponto (1) é igual a 40 kPa.



Resolução

► Considerando um ponto (0) na mesma direção dos pontos (1), (2) e (3).



► **Ponderações:**

- De acordo com a figura, n = K => *dn = dz*,

- *R = R(z) = - Z*,

► **Como desejamos encontrar a pressão ao longo da direção perpendicular à linha de corrente, devemos considerar a equação**

$$p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \gamma z = Constante \ ao \ longo \ da \ direção \ normal$$

$$à \ linha \ de \ corrente$$

► **E um ponto Z_0 qualquer, a partir do qual consideraremos as variações de velocidade.**

- **Vem que,**

$$p_1 + \rho V^2 \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{-z} + \gamma z_1 = p_2 + \rho V^2 \int_{z_0}^{z_2} \frac{dz}{-z} + \gamma z_2$$

$$p_2 = p_1 - \rho V^2 \left(\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z} - \int_{z_0}^{z_2} \frac{dz}{z} \right) + \gamma z_1 - \gamma z_2$$

$$p_2 = p_1 - \rho V^2 \left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} \right) + \gamma (z_1 - z_2)$$

$$p_2 = p_1 - \rho V^2 \left[\ln(z) \,|_{z_1}^{z_2} \right] + \gamma (z_1 - z_2)$$

- **como p_1 = 40000 *Pa*, z_1= - 6 e z_2= - 5, vem que**

$$p_2 = 40000 - 1000(10)^2\left[\ln(-5) - \ln(-6)\right] + 9810(-1) = 40000 - 100.000\left[\ln(-5/-6)\right] - 9810$$

$$p_2 = 12\,kPa$$

- **Analogamente, temos para o ponto (3),**

$$p_3 = p_1 - \rho V^2\left[\ln(z)\,\Big|_{z_1}^{z_3}\right] + \gamma(z_1 - z_3)$$

- **como p_1 = 40000 *Pa*, z_1= 0 e z_3= 2, vem que**

$$p_3 = 40000 - 1000(10)^2\left[\ln(-4) - \ln(-6)\right] + 9810(-2)$$

$$p_3 = -20{,}17\,kPa \;\; (Esta\ é\ uma\ \ pressão\ relativa)$$

3.4 Interpretações Físicas

► **Forma equivalente da equação de Bernoulli**

$$p + \rho \frac{V^2}{2} + \gamma z = Constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

Dividindo esta equação por γ,

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = Constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

► **A dimensão de cada termo da última equação é de comprimento (L).**

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=Constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

► **O termo p/γ é chamado de carga de pressão e representa a altura de uma coluna de fluido necessária para produzir a pressão p.**

► **$V^2/2g$ é a carga de velocidade, e representa a distância vertical para que o fluido acelere do repouso até a velocidade *V* numa queda livre (desprezando o atrito c/ar).**

► **O termo *z* é relacionado com a energia potencial da partícula e é chamado de carga de elevação.**

Exercícios

1) Uma tubulação, com diâmetro igual a 102 mm, transporta 68 m^3/h de água numa pressão de 4 bar. Determine:

a) A carga de pressão.
b) A carga de velocidade.
c) A carga de elevação.
d) A carga total considerando como plano de referência um plano localizado a 6,1 m abaixo da tubulação.

(1 bar = 100 kPa)

Resolução

► **Considerando a equação,**

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=Constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

temos:

a) Carga de pressão,

$$\frac{p}{\gamma}=\frac{400\,kPa}{9810\,N/m^3}=40{,}7\,m$$

b) Carga de velocidade, $\dfrac{V^2}{2g} = ?$

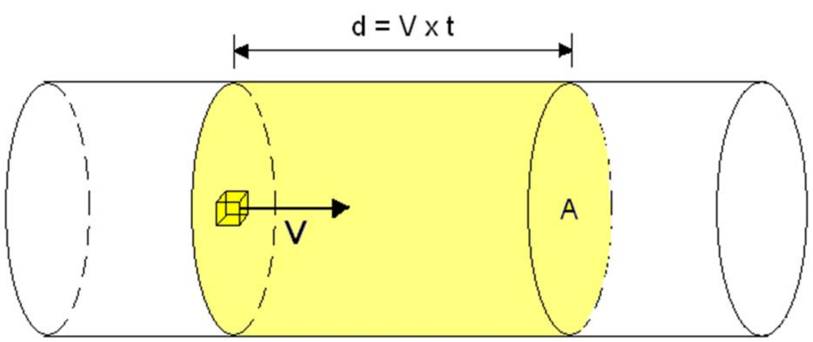
$$Vazão = \frac{Volume}{tempo} = \frac{V \times t \times A}{t} = V \times A \ \ (Velocidade \times Área)$$

$Daí,$

$$Vazão = 68\frac{m^3}{h} = \frac{68\,m^3}{3600s} = 0{,}019\frac{m^3}{s} = V \times \pi(0{,}051)^2$$

$Portanto,\ V = 2{,}32\,m/s,\ \ e,$

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{(2{,}32)^2}{19{,}62} = 0{,}28\,m$$



c) Carga de elevação. Corresponde, neste caso, a z = (6,1 + 0,102) m = 6,202 m.

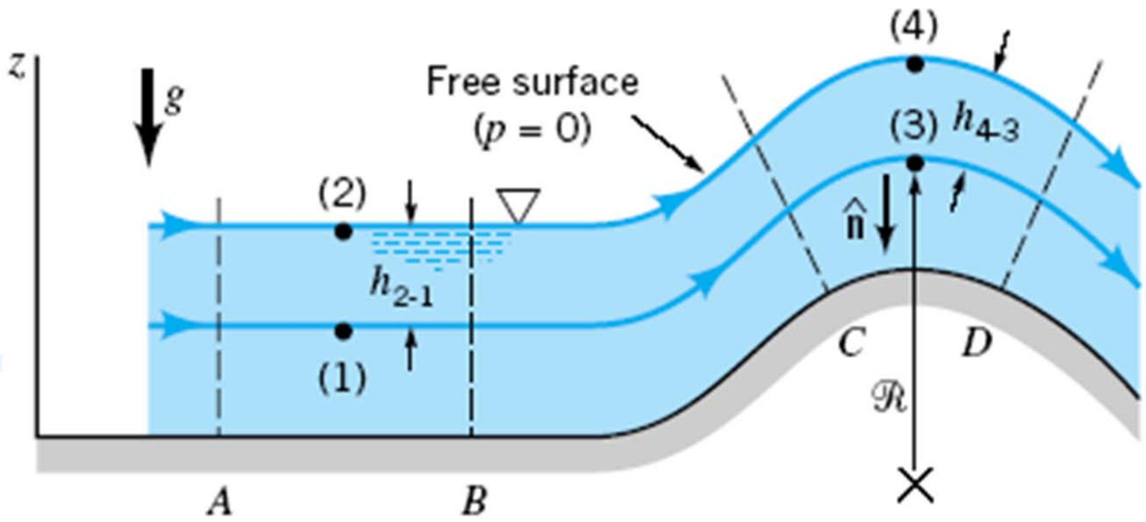
Está relacionado com a energia potencial da partícula, como veremos a seguir.

d) Carga total,

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=Constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=\frac{400000}{9810}+0{,}28+(6{,}1+0{,}102)=47{,}2\,m$$

2) Considere o escoamento incompressível, invíscido e que ocorre em um regime permanente mostrado na figura abaixo. As linhas de corrente são retilíneas entre as seções A e B e circulares ente as seções C e D. Descreva como varia a pressão entre os ponto (1) e (2) e entre os pontos (3) e (4).

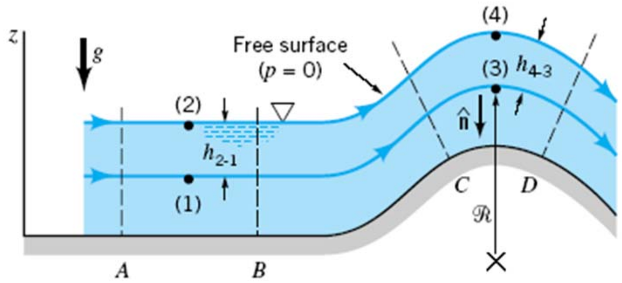


Universidade Federal do ABC

Solução

► **Entre as seções A e B, R → ∞. Logo,**

$$p+\rho\int\frac{V^2}{R}dn+\gamma\, z = p+\gamma\, z = constante$$



► **Analisando os dados do problema,**

p_2 = 0 (pressão relativa na superfície livre do escoamento), e também podemos considerar $z_2 - z_1 = h_{2\text{-}1}$. Daí,

$$p_1+\gamma\, z_1 = p_2+\gamma\, z_2$$

$$p_1 = p_2+\gamma\,(z_2-z_1) = \gamma\, h_{2-1}$$

Que é um resultado já conhecido.

► **Entre as seções C e D, *R* = $\Re$, e *dn* = *-dz*. Logo,**

$$p_4 + \rho \int_{z_0}^{z_4} \frac{V^2}{R}(-dz) + \gamma\, z_4 = p_3 + \int_{z_0}^{z_3} \frac{V^2}{R}(-dz) + \gamma\, z_3$$

p_4 = 0 (pressão relativa na superfície livre do escoamento), e também podemos considerar $z_4 - z_3 = h_{4\text{-}3}$. Daí,

$$p_4 + \rho \int_{z_o}^{z_4} \frac{V^2}{R}(-dz) - \int_{z_o}^{z_3} \frac{V^2}{R}(-dz) + \gamma\, z_4 = p_3 + \gamma\, z_3$$

$$p_4 - \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{R} dz + \gamma\, z_4 = p_3 + \gamma\, z_3, \quad ou$$

$$p_3 = p_4 - \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{R} dz + \gamma (z_4 - z_3), \quad como \quad p_4 = 0$$

$$p_3 = \gamma\, h_{4-3} - \rho \int_{z_3}^{z_4} \frac{V^2}{R} dz$$

É preciso saber como V e $\Re$ variam com z. Veja o exercício da página 40.

3.5 Pressão Estática, Dinâmica, de estagnação total

► **Cada termo da equação de Bernoulli representa uma força por unidade de área.**

$$p+\rho\frac{V^2}{2}+\gamma\, z = Constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

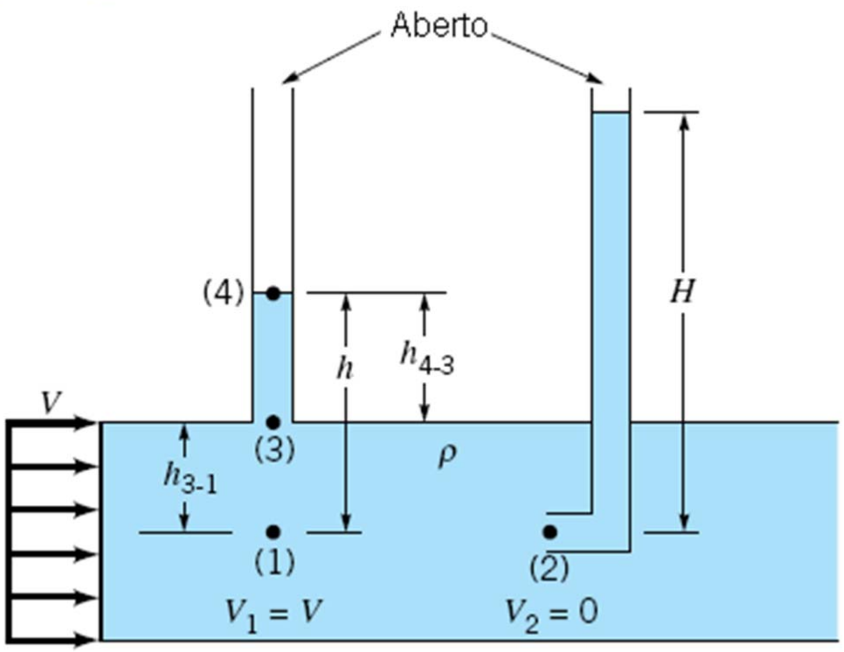
► ***p*** **é pressão termodinâmica do fluido. Para medi-la, é preciso se movimentar solidariamente ao fluido. Por isso, também é chamada de pressão estática.**

► **$\rho V^2/2$ é a pressão dinâmica, já que está relacionada com a velocidade.**

► **γz é a chamada pressão hidrostática, relacionada à altura da coluna do fluido.**

► **A soma dessas pressões é chamada de pressão total.**

Dispositivos para medir as pressões



Aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos (1) *e* (2)

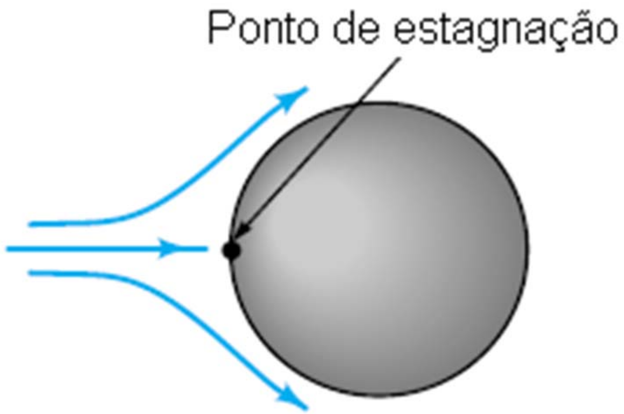
$$p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1$$

Como $z_1 = z_2$ *e*

$V_2 = 0$ (*ponto de estagnação*)

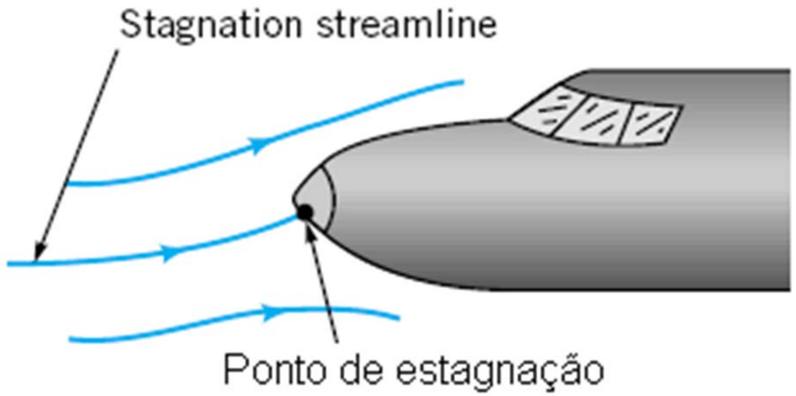
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = \gamma H$$

► **A linha de corrente que passa pelos pontos (1) e (2) é chamada de linha de corrente de estagnação.**



► Para objetos simétricos, o ponto de estagnação está localizado à frente. Como em uma esfera, por exemplo.

► Em objetos não simétricos, o ponto de estagnação depende de fatores como a forMa do objeto, por exemplo.



Tubo de Pitot Estático

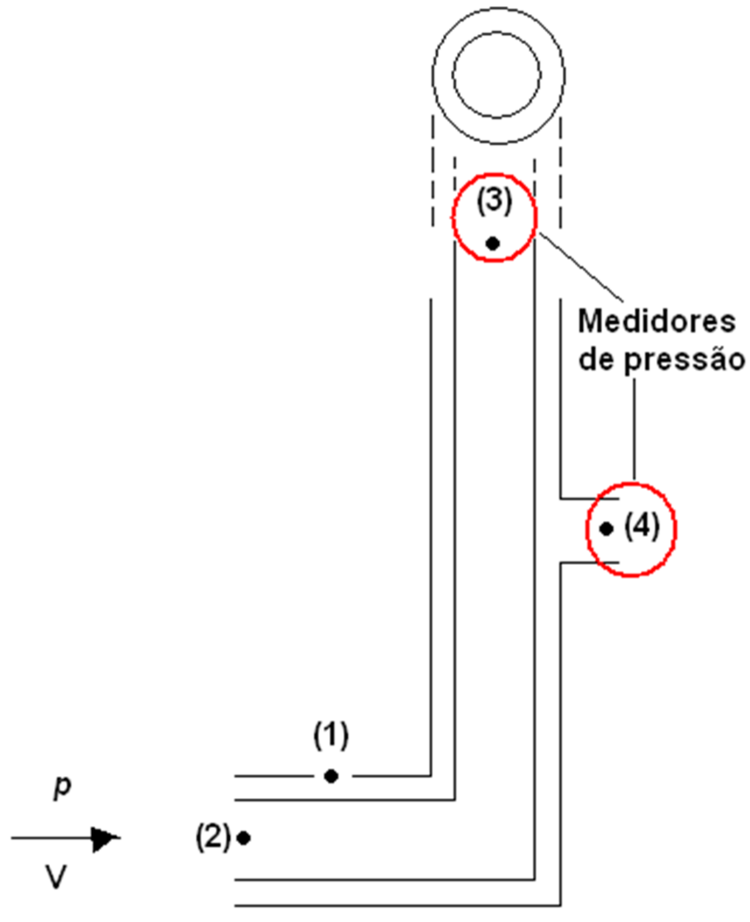
▶ **Características:**

- Dois tubos concêntricos;

- Ambos conectados a medidores de pressão nos pontos (3) e (4);

- O tubo externo possui furos, nos quais a pressão é *p*;

- O tubo central mede a pressão de estagnação;



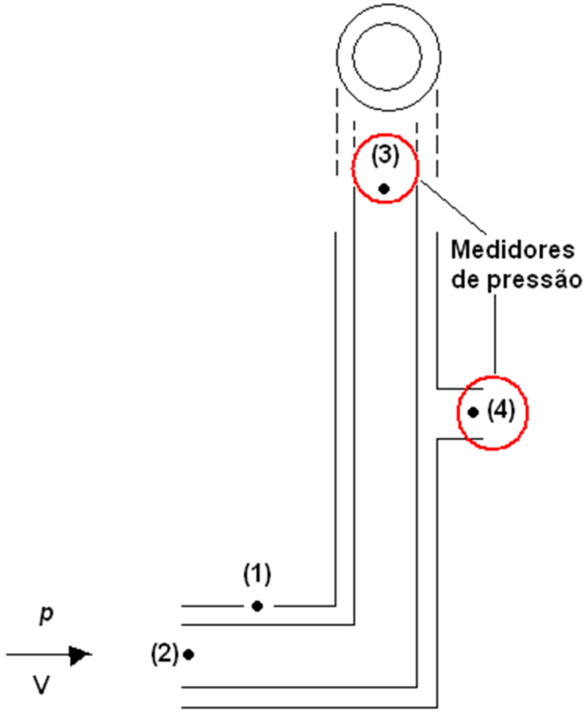
► Quando imerso em um escoamento com regime permanente, invíscido e incompressível, cujas dimensões são muito maiores que o tubo:

- $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$;

- p e V são a pressão e a velocidade no montante (antes do ponto (2));

- $p_3 = p_2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$;

- $p_4 = p_1 = p$;



► Assim,

$$p_3 = p_4 + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$V = \sqrt{\frac{2(p_3 - p_4)}{\rho}}$$

Exemplo

1) A Figura abaixo mostra um avião voando a 160 km/h numa altitude de 3000 m. Admitindo que a atmosfera seja padrão, determine a pressão longe de avião (ponto (1)), a pressão no ponto de estagnação do avião (ponto (2)), e a diferença de pressão indicada pelo tubo de Pitot que está instalado na fuselagem do avião,

Resolução

► De acordo com a tabela C1 do Young, para: h = 3000 m, *p* = 70,12 k*Pa* *e* *ρ* = 0,9093 kg/m³.

► No ponto de estagnação, $V_2 = 0$ e $z_1 = z_2$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2$$

$$p_2 = 70{,}12 \times 10^3 + \frac{1}{2} \times 0{,}9093 \times (44{,}44)^2$$

$$p_2 = 71{,}02\,\mathrm{k}Pa$$

► A pressão na entrada do tubo Pitot é igual a p_2, e a pressão no tubo externo é p_1. Daí,

$$p_2 - p_1 = 896\,Pa$$

► **Ponderações finais sobre o tubo de Pitot estático:**

- Como $\rho = p/RT$, variações de pressão e de temperatura poderão produzir variações na massa específica.

- Para velocidades relativamente baixas, a razão entre as pressões absolutas é aproximadamente igual a 1. No exemplo anterior, $p_1/\ p_2 = 0{,}987$. Assim, a variação da massa específica é desprezível.

- Para velocidades muito altas é preciso considerar elementos de escoamentos compressíveis.

Universidade Federal do ABC

3.6 Exemplos de Aplicações da Equação de Bernoulli

► **Em todos os exemplos que iremos abordar, considera-remos:**

- Escoamentos em regime permanente;

- Escoamentos invíscidos (viscosidade nula);

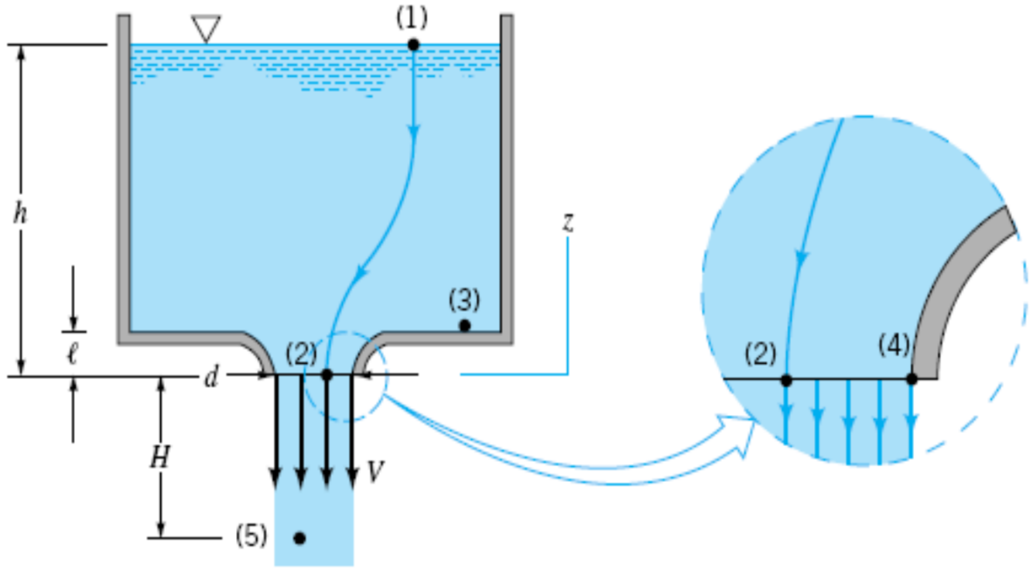
- Escoamentos incompressíveis, ρ = constante.

► **Com boa aproximação, muitos escoamentos de interesse em física, química e engenharias podem ser estudados a partir dessas considerações.**

3.6.1 Jato livre

► **Consideremos um jato de líquido de diâmetro *d* escoando através de um bocal com velocidade *V*.**

- $p_1 = 0$ **(pressão relativa)**
- $V_1 = 0$ **(tanque largo)**
- $V_2 = V$
- $p_2 = 0$ **(jato livre na atmosfera)**



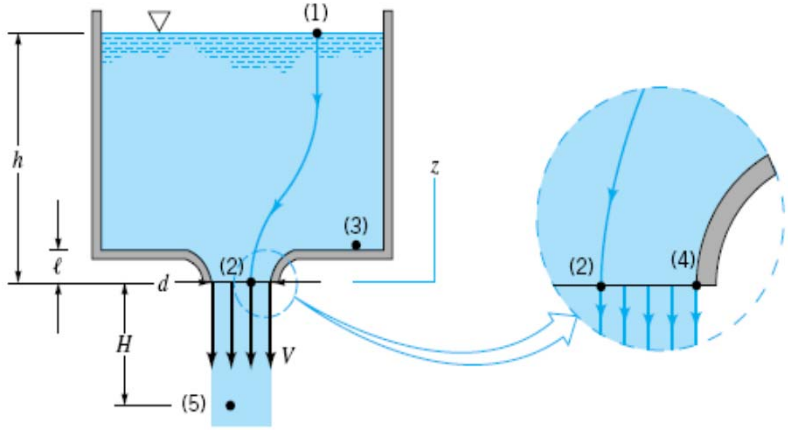
► **Aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos (1) e (2).**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

$$\gamma(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$\gamma h = \frac{1}{2}\rho V^2$$

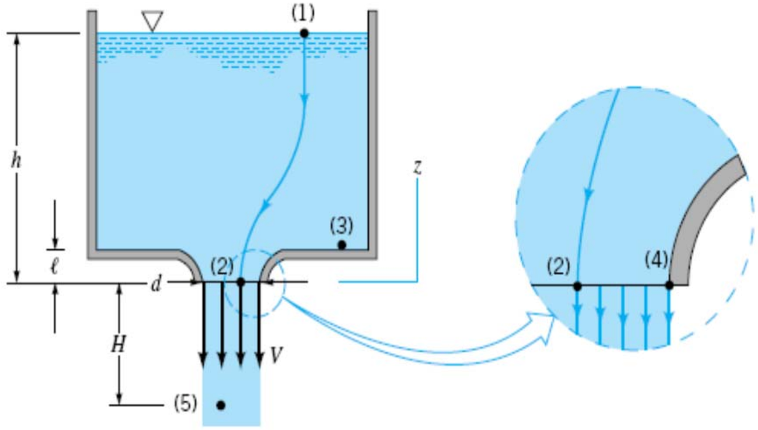
$$V = \sqrt{\frac{2\gamma h}{\rho}}$$



Como $\gamma = \rho g$, vem que $V = \sqrt{\frac{2\gamma h}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho}} = \sqrt{2gh}$

▶ **Outras Considerações.**

- $p_1 = p_2 = 0$ **(jato livre, fora na atmosfera)**
- $p_3 = \gamma(h - \ell)$ **(pressão relativa)**
- $V_3 = V$
- $p_5 = 0$ **(jato livre na atmosfera)**



▶ **Aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos (1) e (5).**

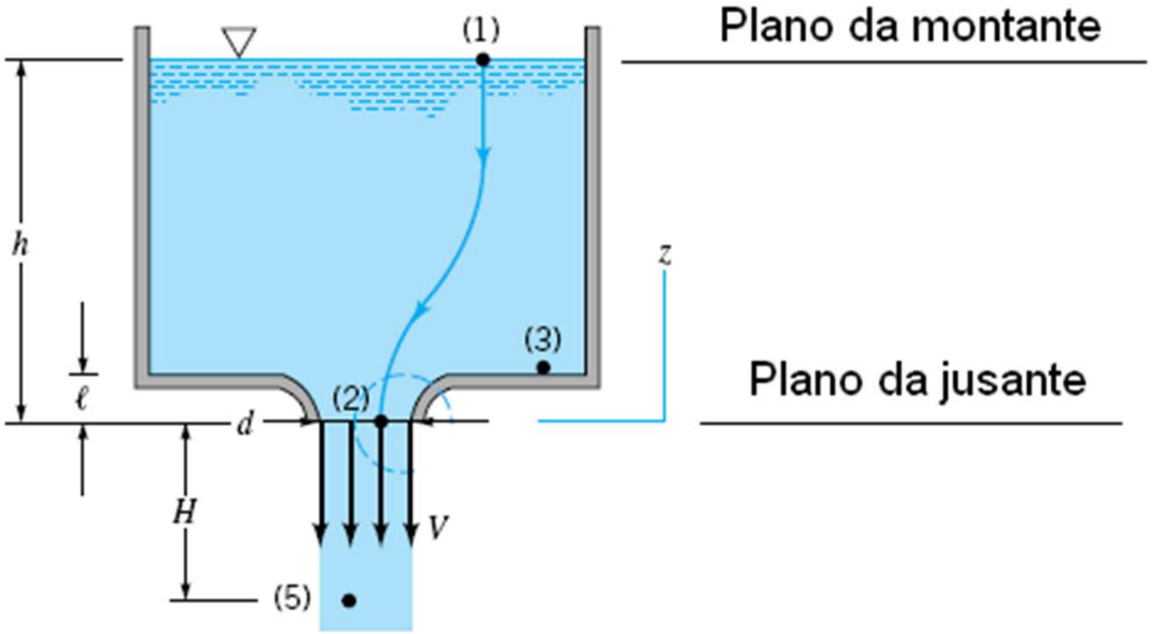
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_5 + \frac{1}{2}\rho V_5^2 + \gamma z_5$$

$$\gamma(z_1 - z_5) = \frac{1}{2}\rho V_5^2 \quad \rightarrow \quad V_5 = \sqrt{2g(h+H)}$$

Universidade Federal do ABC

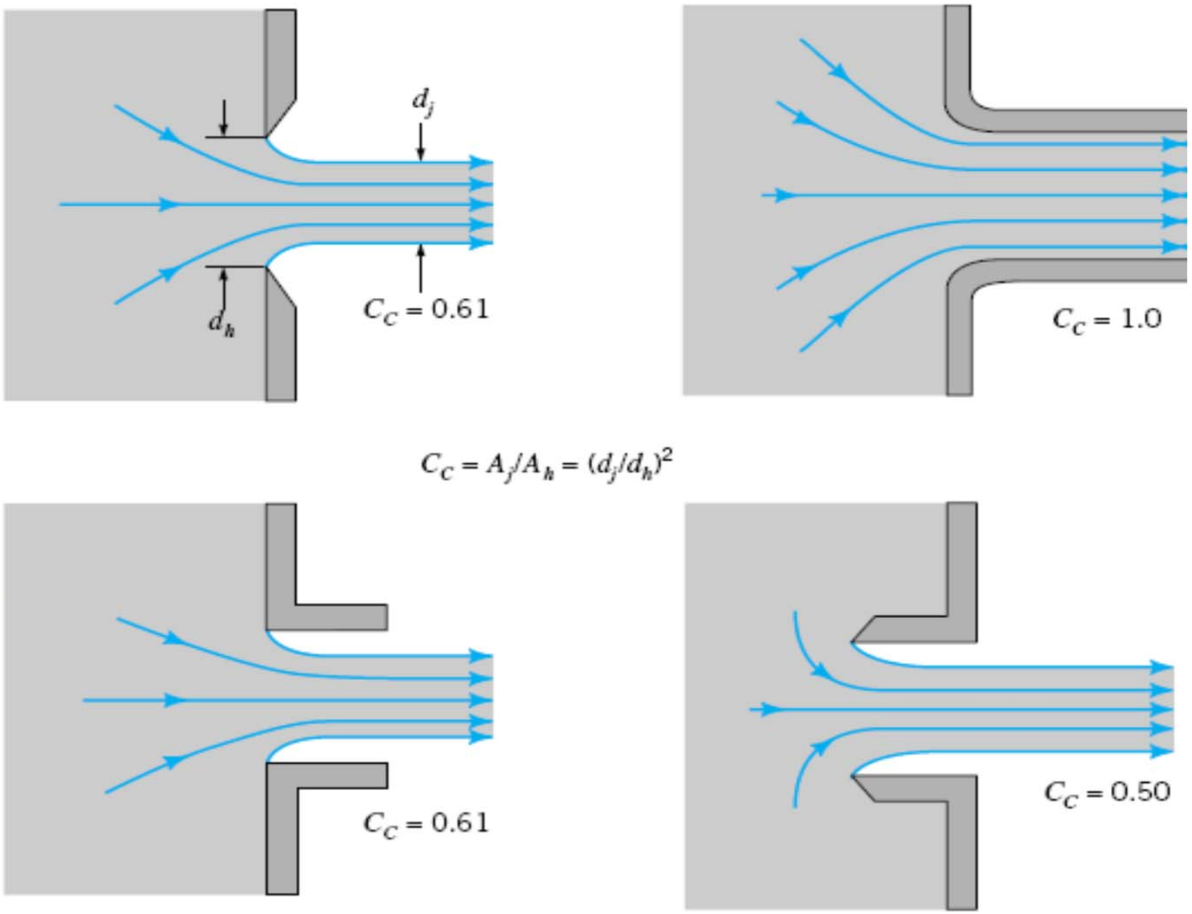
- À altura da abertura da descarga, localiza-se o plano da jusante.

- À altura da superfície livre do tanque, localiza-se o plano da montante.



► Vena Contracta

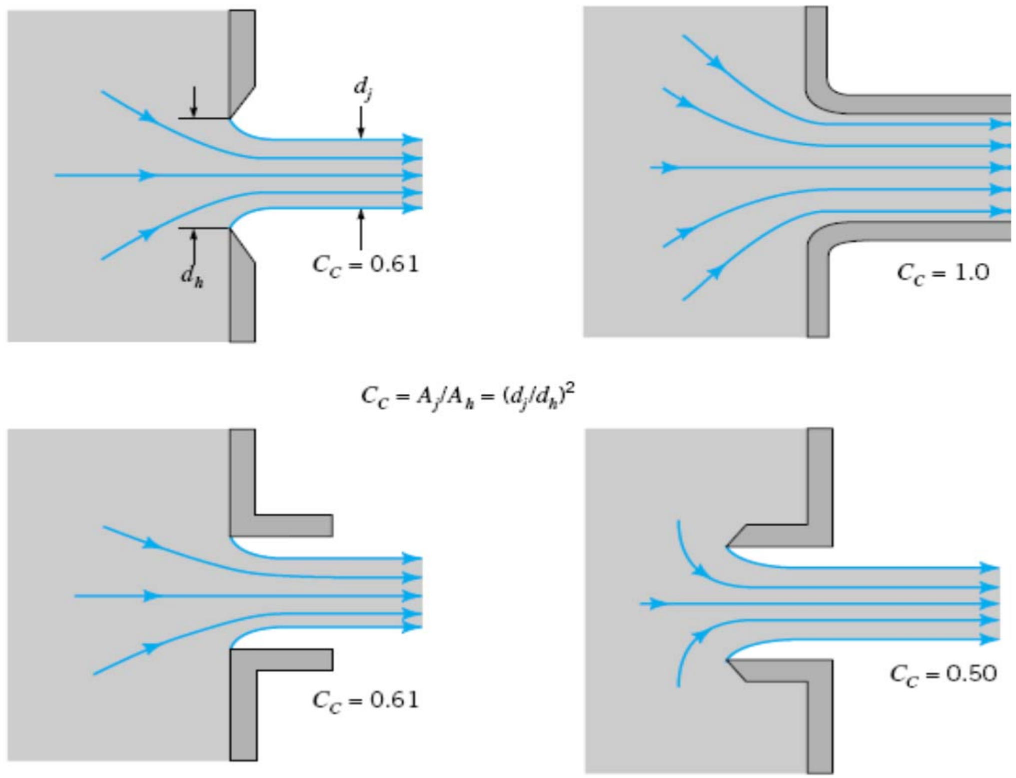
Se o contorno do bocal não for suave, o diâmetro do jato, d_j, é menor do que o diâmetro do bocal, d_h. Este fenômeno é chamado de Vena Contracta.



▶ **Coeficiente de Contração, C_C,** $$C_C = \frac{A_j}{A_h}$$

- **A_j é a área da seção transversal do jato (na vena contracta).**

- **A_h é a área da seção transversal da seção de Descarga (bocal).**



3.6.2 Escoamentos confinados

▶ **Características gerais:**

- **O fluido está confinado fisicamente, por exemplo, por paredes;**

- **A pressão não pode ser medida diretamente;**

- **O Escoamento dever ocorrer em regime permanente, isto é, não pode haver aumento ou diminuição da quantidade de fluido no volume;**

- **A taxa de fluido que escoa para dentro do volume deve ser igual à taxa de fluido que escoa para fora;**

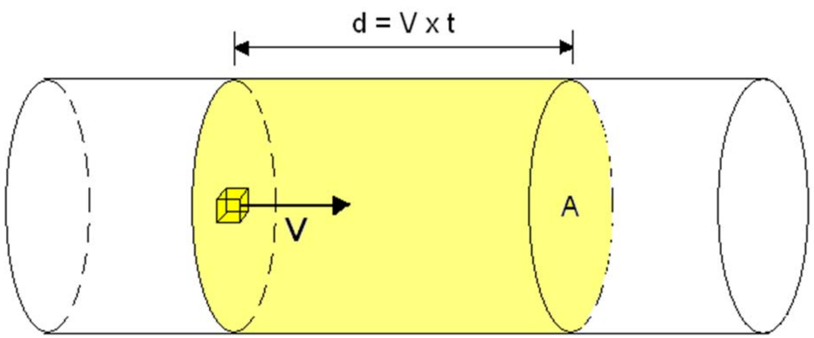
► **Vazão em volume,**

$$Q = \frac{volume}{tempo} = \frac{V \times t \times A}{t} = V \times A$$ **(m^3/s no SI)**

► **Vazão em massa na seção de descarga ou entrada do fluido,**

$$\dot{m} = \frac{massa}{tempo} = \frac{m}{t} = \frac{\rho \times Volume}{t} = \rho Q$$ **(kg/s no SI)**

$$\dot{m} = \rho Q = \rho A V$$

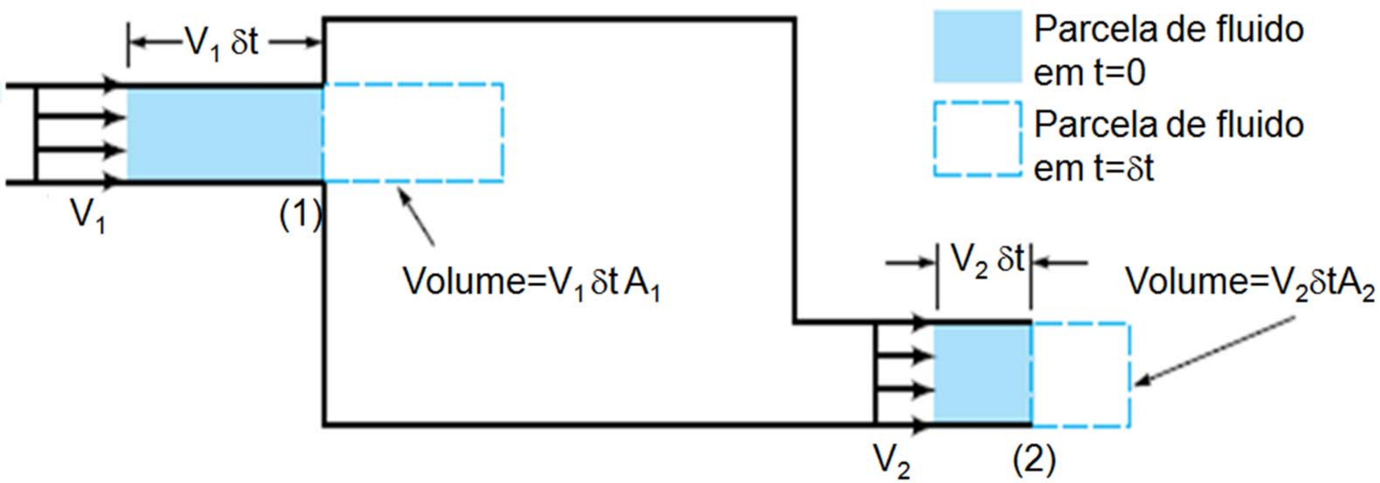


► Equação da continuidade (Primeira versão)

Sejam:

• **A_1 a área da seção de entrada de fluido no volume (área da fonte)e A_2 a área da seção de saída (área do sorvedouro).**

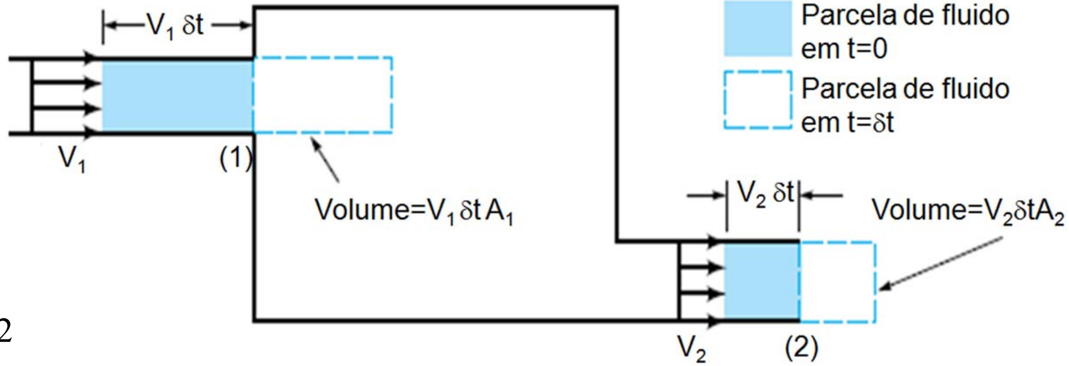
• **V_1 a velocidade média com a qual o fluido escoa para dentro do volume na direção normal a A_1 e V_2 a velocidade média com a qual o fluido escoa para fora do volume na direção normal a A_2.**



► **Os volumes que passam por A_1 e A_2 durante um intervalo de tempo δt são:**

$$Volume = V_1 A_1 \delta t = V_2 A_2 \delta t \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Como



$$Q = volume / tempo$$

$$Q = \frac{Volume}{\delta t} = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

ou

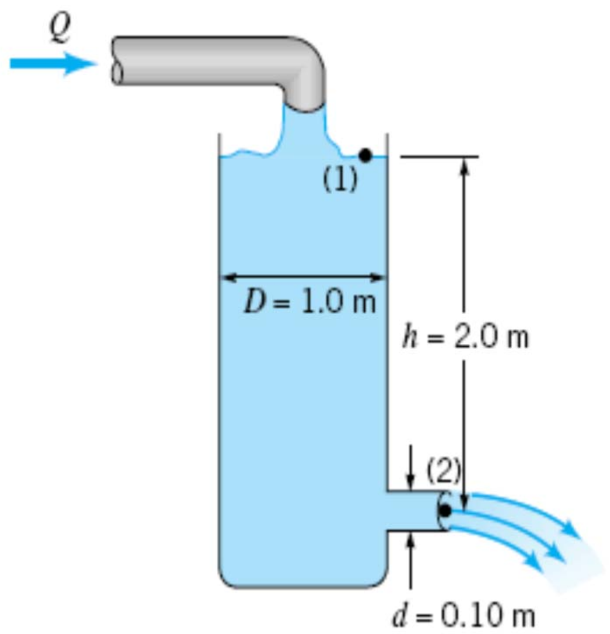
$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

ou, ainda,

$$Q_1 = V_1 A_1, \qquad Q_2 = V_2 A_2 \qquad e \qquad Q_1 = Q_2$$

Exercícios

1) A figura abaixo mostra um tanque (diâmetro D = 1,0 m) que é alimentado com um escoamento de água proveniente de um tubo que apresenta diâmetro, *d*, igual a 0,1 m. Determine a vazão em volume, *Q*, necessária para que o nível de água no tanque, *h*, permaneça constante.



► **Considerando o escoamento invíscido, incompressível e de regime permanente,**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

Como $p_1 = p_2 = 0 \quad (\textit{estão em contato com a atmosfera})$

$$z_1 - z_2 = h$$

Vem que $\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma h = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \qquad :\rho$

$$\frac{1}{2}V_1^2 + gh = \frac{1}{2}V_2^2 \qquad (*)$$

Universidade Federal do ABC

► **O nível da água permanece constante (h = constante), porque existe uma alimentação de água no tanque. Portanto,**

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \qquad (2^*)$$

$$A_1 = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} D^2$$

$$A_2 = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2 \qquad (3^*)$$

De (2*) *em* (3*),

$$\frac{\pi}{4} D^2 V_1 = \frac{\pi}{4} d^2 V_2 \Rightarrow V_1 = \left(\frac{d}{D} \right)^2 V_2 \qquad (4^*)$$

- **De (4*) e (*),**

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d}{D}\right)^2 V_2\right]^2 + gh = \frac{1}{2}V_2^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^4 V_2^2 + gh = \frac{1}{2}V_2^2$$

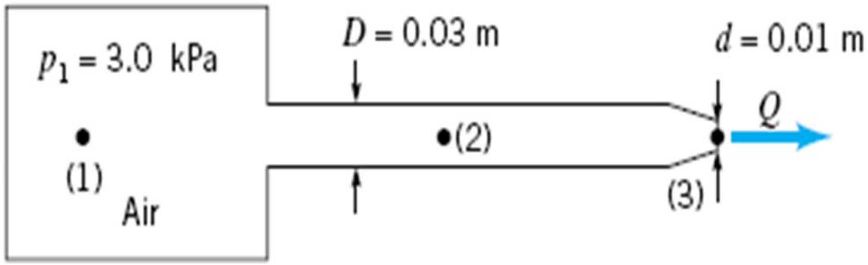
$$V_2^2\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = 2gh$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{[1-(d/D)^4]}} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{2\times 9{,}81\times 2}{[1-(0{,}1/1)^4]}} = 6{,}26\, m/s$$

- **A vazão é, portanto,**

$$Q = A_1V_1 = A_2V_2 = \frac{\pi}{4}(0{,}1)^2(6{,}26) = 0{,}0493\, m^3/s$$

2) A figura a seguir mostra o esquema de uma mangueira com diâmetro *D* = 0,03 m que é alimentada, em regime permanente, com ar proveniente de um tanque. O fluido é descarregado no ambiente através de um bocal que apresenta seção de descarga, *d*, igual a 0,01 m. Sabendo que a pressão no tanque é constante e igual a 3,0 k*Pa* (relativa) e que a atmosfera apresenta pressão e temperatura padrões, determine a vazão em massa e a pressão na mangueira.



► **Aplicando a equação de Bernoulli nos pontos (1), (2) e (3),**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2 + \gamma z_3$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0 \quad (mangueira\ horizontal)$$

$$V_1 = 0 \quad (tanque\ grande)$$

$$p_3 = 0 \quad (jato\ livre - atmosfera)$$

$$Daí, \quad p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 = \frac{1}{2}\rho V_3^2$$

$$Assim, \quad V_3 = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}}$$

e

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

► **Para calcularmos a massa específica,**

$$\rho = \frac{p_3}{RT} = \frac{[(3+101)\times 10^3\ Pa]}{286{,}9\ Jkg/K \times [(15+273)K]} = 1{,}23\,kg/m^3$$

► **Note que devem ser usadas pressões e temperaturas absolutas (lei dos gases ideais). Desta forma, V_3 fica,**

$$V_3 = \sqrt{\frac{2\times(3{,}0\times 10^3)}{1{,}26}} = 69\ m/s$$

► **A vazão em volume é,**

$$Q = A_3 V_3 = \frac{\pi}{4} d^2 V_3 = \frac{\pi}{4}(0{,}01)^2(69)$$

$$Q = 5{,}42\times 10^{-3}\ m^3/s$$

► **Notemos que o valor de V_3 não depende do formato do bocal,**

► **A carga de pressão no tanque,**

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{3000\,Pa}{9{,}81\,m/s^2 \times 1{,}26\,kg/m^3} = 243\,m$$

► **A carga de pressão é convertida em carga de velocidade na seção de descarga, vejam**

$$\frac{V_3^2}{2g} = \frac{(69\,m/s)^2}{2 \times 9{,}81\,m/s^2} = 243\,m$$

► **Calculo da pressão na mangueira, ponto (2). 1º a eq. continuidade,**

$$A_2V_2 = A_3V_3 \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{A_3V_3}{A_2} = \frac{(\pi/4)d^2V_3}{(\pi/4)D^2} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_3 = \left(\frac{0{,}01}{0{,}03}\right)^2 (69) = 7{,}67\,\frac{m}{s}$$

► **Continuando,**

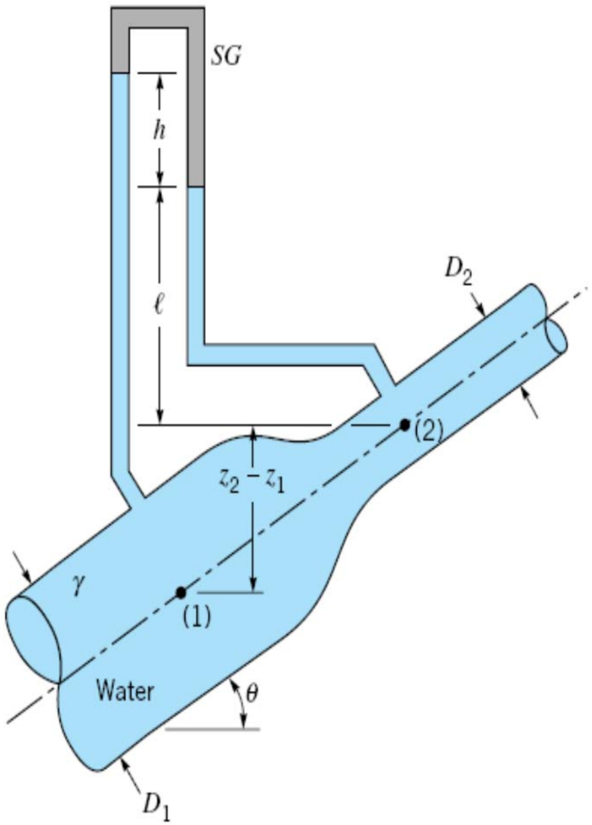
$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho V_2^2 = 3{,}0\times 10^3 - \frac{1}{2}(1{,}26)(7{,}67)^2$$

$$p_2 = 2963\, N/m^2$$

► **O decréscimo de pressão do ponto (1) até o ponto (3) acelera o ar e aumenta sua energia cinética.**

► **A razão entre a variação de pressão no (1) e entre (1) e (3) $p_1 / (p_1 - p_3) = 0{,}973 \Rightarrow$ em uma variação inexpressiva da massa específica, isto é, ρ pode ser considerado constante.**

3) A figura a seguir mostra o escoamento de água numa redução. A pressão estática em (1) e em (2) são medidas com um manômetro em U invertidos que utiliza óleo, de densidade $SG_{óleo}$, como fluido manométrico. Nestas condições, determine a altura *h* do manômetro.



► **Admitindo que o escoamento seja invíscido, permanente e incompressível, podemos aplicar a equação de Bernoulli nos pontos (1) e (2).**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 \qquad (*)$$

Admitiremos também que γ e ρ são o peso específico e a massa específica da água.

Além disso, $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$, *daí,*

$$V_1 = \frac{A_2 V_2}{A_1} = \frac{\pi (D_2/2)^2}{\pi (D_1/2)^2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 V_2$$

Daí, substituindo em (*), *vem que,*

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4 V_2^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

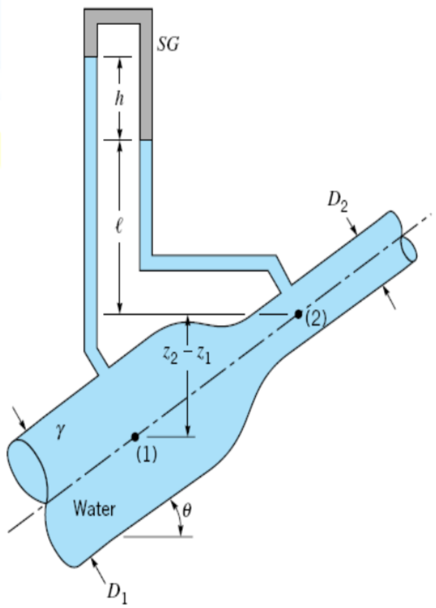
$$p_1 - p_2 = \gamma (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho V_2^2\left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right] \qquad (2*)$$

► **A equação**

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho V_2^2\left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right]$$

fornece a diferença de pressão medida pelo manômetro.

► **Dos estudos do capítulo 1,**



$$p_1 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma\,\ell + p_3 \qquad (3^*)$$

$$p_3 = p_4$$

$$p_2 = \gamma\,\ell + \gamma_{óleo} h + p_4 = \gamma\,\ell + \gamma_{óleo} h + p_3$$

Logo,

$$p_3 = p_2 - \gamma\,\ell - \gamma_{óleo} h \qquad (4^*)$$

▶ **De (4*) em (3*)**

$$p_1 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma\,\ell + \gamma\,h + p_2 - \gamma\,\ell - \gamma_{óleo}h$$

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma\,h - \gamma_{óleo}h \qquad (5^*)$$

Mas,

$$\gamma_{óleo} = \rho_{óleo}g \quad e \quad SG_{óleo} = \frac{\rho_{óleo}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho_{óleo} = \rho SG_{óleo}$$

Daí,

$$\gamma_{óleo} = \rho_{óleo}g = \rho\,SG_{óleo}\,g = \gamma\,SG_{óleo} \qquad (6^*)$$

- **De (6*) em (5*)**

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma h - \gamma SG_{óleo} h$$

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + \gamma(1 - SG_{óleo}) h \qquad (7^*)$$

- **Combinando as equações (7*) e (2*)**

$$\gamma(z_2 - z_1) + \gamma(1 - SG_{óleo}) h = \gamma(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho V_2^2 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right]$$

$$\gamma(1 - SG_{óleo}) h = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right], \qquad (como\, \gamma = \rho g)$$

$$Finalmente, \quad h = \frac{V_2^2 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right]}{2g(1 - SG_{óleo})} \qquad (8^*)$$

► **Se desejável, ou conveniente, podemos inserir a vazão em volume,**

$$Q_2 = A_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2^2 = \frac{Q^2}{A_2^2}$$

Assim,

$$h = \frac{V_2^2\left[1-\left(\dfrac{D_2}{D_1}\right)^4\right]}{2g(1-SG_{óleo})} = \left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 \frac{1-(D_2/D_1)^4}{2g(1-SG_{óleo})}$$

► **Notemos que $\gamma(z_1 - z_2)$ não interfere no valor de *h, mas sim no valor de* $p_1 - p_2$.**

► **$\gamma(z_1 - z_2)$ pode ser escrito em função da deflexão, θ, do manômetro.**

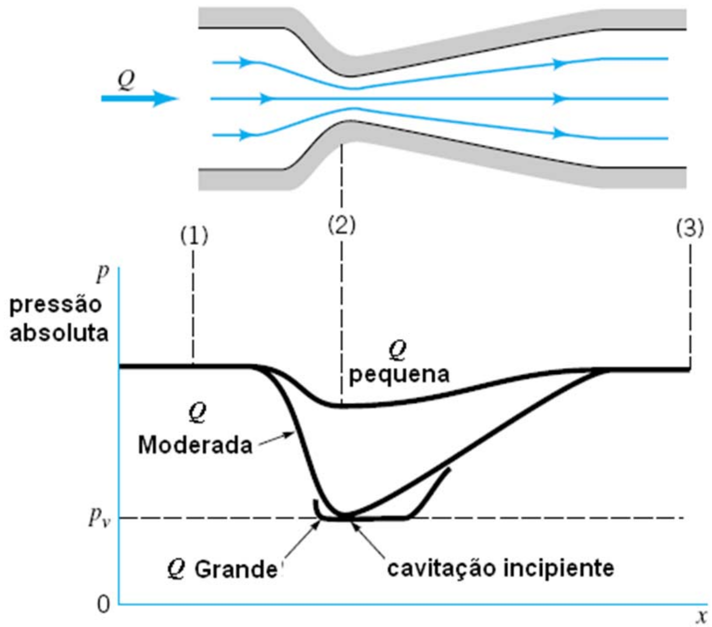
► Em geral, em escoamentos como o anterior, a equação de Bernoulli mostra que um aumento de velocidade é acompanhado de uma diminuição da pressão.

Cavitação

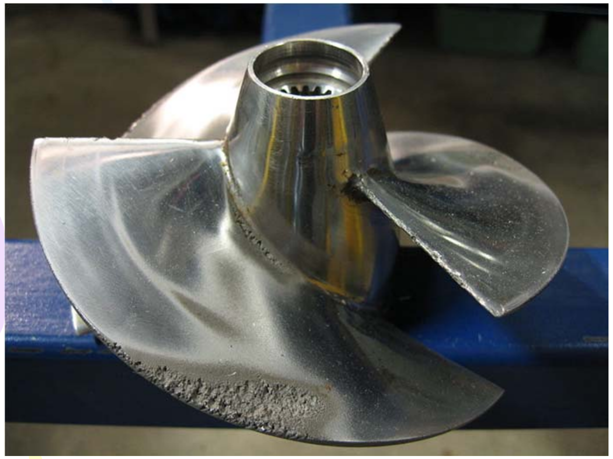
► Ocorre em escoamentos de líquidos nos quais as variações de velocidades causam variação consideráveis de pressão.

► Neste caso, a pressão em um ponto é reduzida à pressão de vapor e o líquido sofrerá evaporação.

► Isto pode ocorrer devido a uma redução da área disponível para o escoamento.



► **A combinação entre a pressão, temperatura e velocidade resulta na liberação de ondas de choque e micro-jatos altamente energéticos, causando a aparição de altas tensões mecânicas e elevação da temperatura, provocando danos na superfície atingida.**



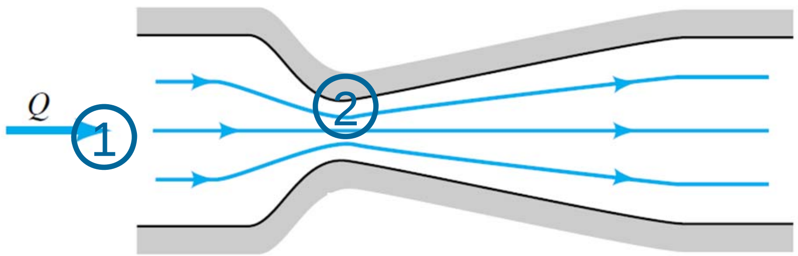
► **Aplicando a equação de Bernoulli em dois pontos da mesma linha de corrente:**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2$$

► **Como $z_1 = z_2$**

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(V_1^2 - V_2^2\right) \leq p_{vapor}$$

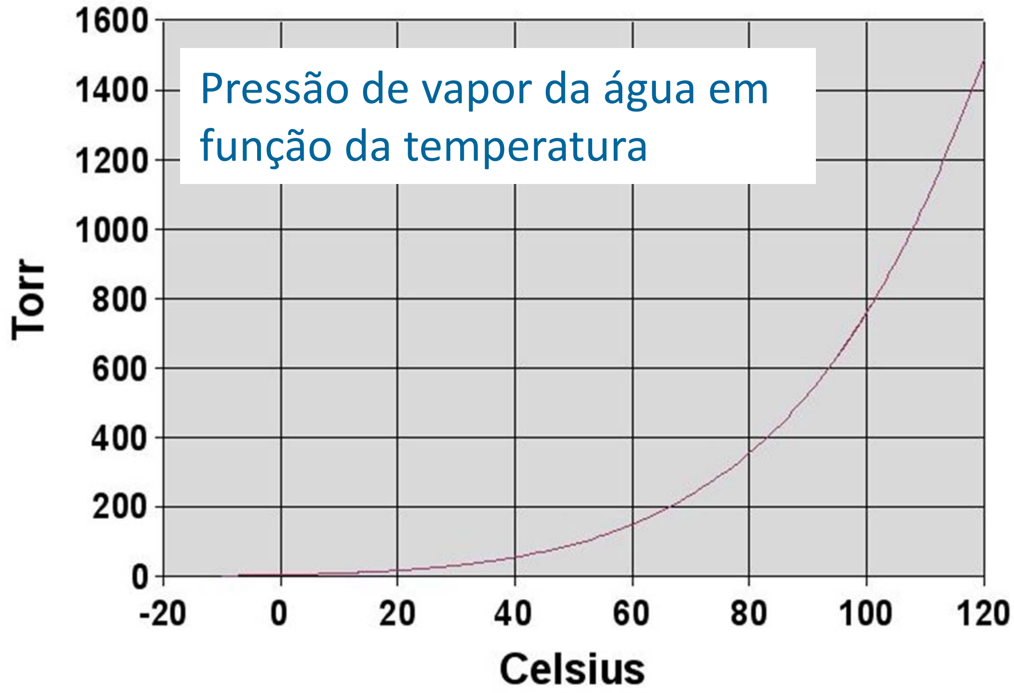
Tem-se assim, a condição para que ocorra cavitação.



Pressão de vapor

ρ e p_v de alguns líquidos

	Massa específica ρ	Pressão de vapor *p*
	kg/m³	N/m² (abs)
Tetracloreto de carbono	1590	1,3E+04
Álcool etílico	789	5,9E+03
Gasolina	680	5,5E+04
Glicerina	1260	1,4E-02
Mercúrio	13600	1,6E-01
Óleo SAE 30	912	-
Água do mar	1030	1,77E+03
Água	999	2,34E+03



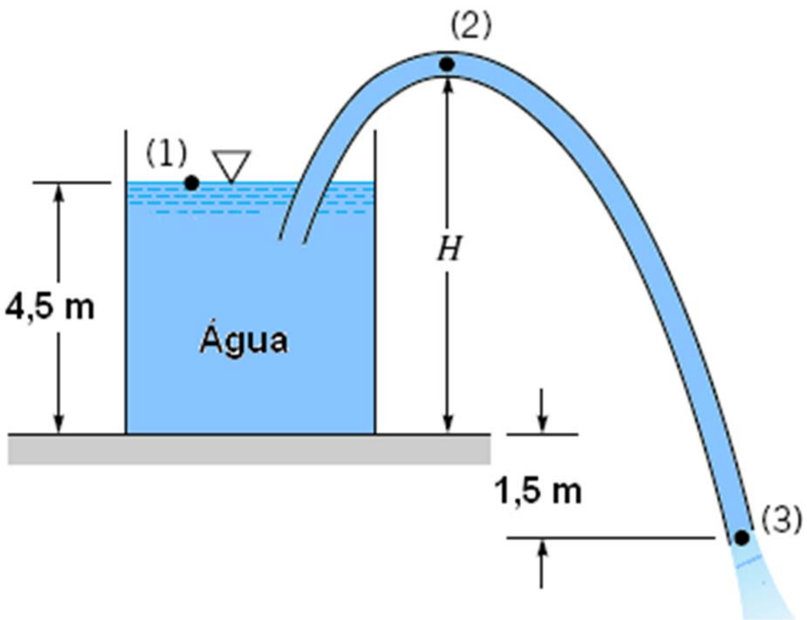
1 Torr = 1 mmHg = 133,322 Pa

Usos da cavitação

- Tratamento de cálculos renais.
- Limpeza de superfícies.
- Propulsores a supercavitação.

Exercício

A figura abaixo mostra um modo de retirar água, a 20º C, de um tanque grande. Sabendo que o diâmetro da mangueira é constante, determine a máxima elevação da mangueira, *H*, para que não ocorra Cavitação no escoamento de água na mangueira. Admita que a seção de descarga da mangueira está localizada a 1,5 m abaixo da superfície inferior do tanque e que a pressão atmosférica é 1,013 bar (abs).



► **Aplicando a equação de Bernoulli nos pontos (1), (2) e (3), supondo que os três estejam na mesma linha de corrente.**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma\, z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma\, z_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho V_3^2 + \gamma\, z_3$$

$$z_1 = 4{,}5\,m \qquad V_1 = 0\ (tanque\ largo) \qquad p_1 = 0\ (relativa)$$

$$z_2 = H$$

$$z_3 = -1{,}5\,m \qquad p_3 = 0\ \ (relativa - em\,contato\,com\,a\,atmosfera)$$

$$Daí,$$

$$\gamma\, z_1 = \frac{1}{2}\rho V_3^2 + \gamma\, z_3$$

$$V_3 = \sqrt{2g(z_1 - z_3)} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times [4{,}5 - (-1{,}5)]} = 10{,}8\,m/s$$

▶ **Como o diâmetro da mangueira é constante,**

$$A_2 V_2 = A_3 V_3 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_3 = 10{,}8\, m/s \qquad (*)$$

▶ **Entre os pontos (1) e (2),**

$$\gamma\, z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma\, H$$

$$p_2 = \gamma\,(z_1 - H) - \frac{1}{2}\rho V_2^2 \qquad (2^*)$$

▶ **A 20º C, a pressão absoluta do vapor d'água é 2,338 k*Pa.* Na equação de Bernoulli, entretanto, usa-se a pressão relativa.**

$$p_2 = 2{,}338\, kPa - 101{,}3\, kPa = -99\, kPa \qquad (3^*)$$

► **Substituindo (*) e (3*) em (2*), vem que,**

$$-99\times10^{3}=9810\times(4{,}5-H)-\frac{1}{2}\times1000\times(10{,}8)^{2}$$

$$H=8{,}7\,m$$

► **Se *H* ≥ 8,7 m, ocorrerá formação de bolhas em (2) e o escoamento cessará.**

► **Se as pressões absolutas tivessem sido consideradas, o resultados seria o mesmo.**

► **Os resultados encontrados independem do diâmetro do sifão.**

3.6.3 Medida de Vazão

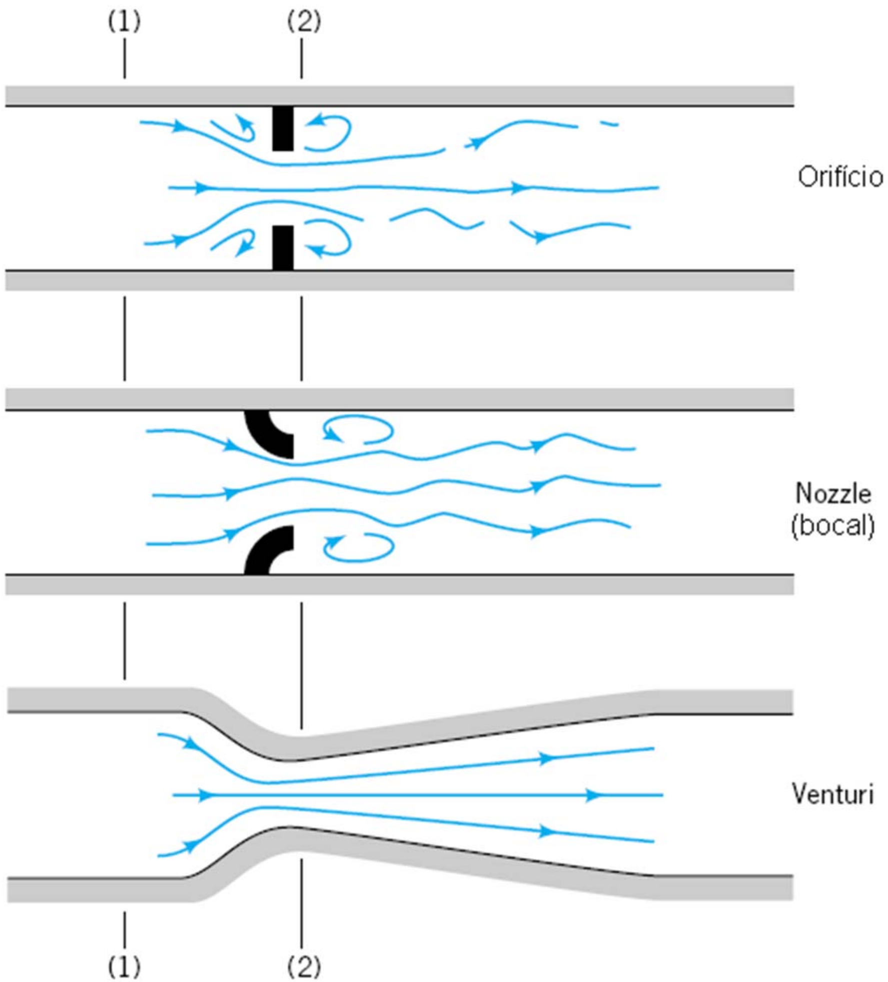
- **Um modo efetivo de se medir a vazão em volume é introduzindo algum tipo de restrição ao escoamento.**

- **Para todos os 3 casos, a equação de Bernoulli é aplicável, com $z_1 = z_2$.**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

e

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$



- **Continuando,**

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2)$$

e

$$V_1 = \frac{A_2 V_2}{A_1},$$

Daí,

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\left[V_2^2 - \left(\frac{A_2 V_2}{A_1}\right)^2\right]$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1-(A_2/A_1)^2]}}$$

- **A vazão, então, pode ser dada por**

$$Q = A_2 V_2$$

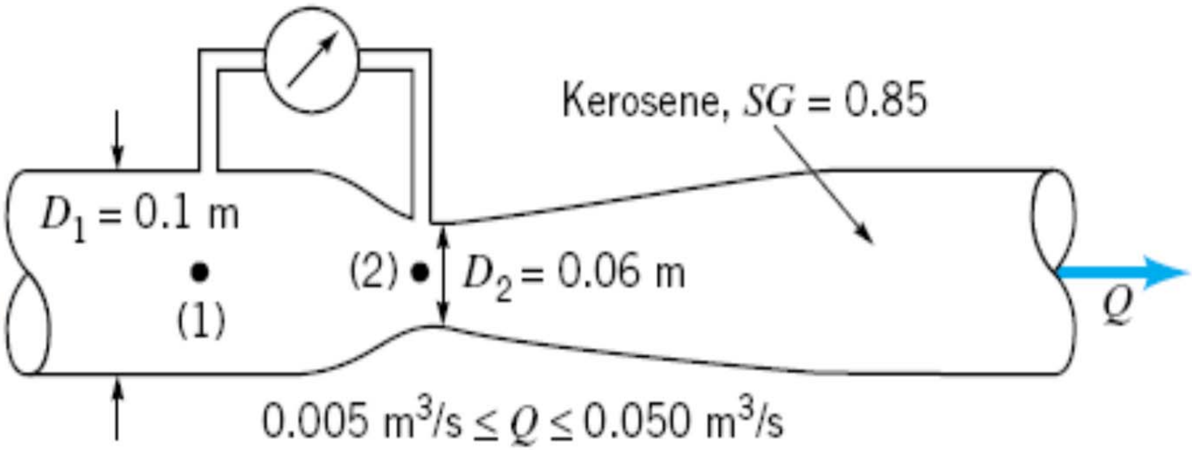
$$Q = A_2\left\{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1-(A_1/A_2)^2]}\right\}^{1/2}$$

ou

$$Q = A_2\left\{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1-(D_1/D_2)^4]}\right\}^{1/2}$$

Exercício

1) Querosene (densidade = 0,85) escoa no medidor de Venturi mostrado na figura abaixo e a vazão em volume varia de 0,005 a 0,050 m³/s. Determine a faixa de variação da diferença de pressão medida nestes pontos ($p_1 - p_2$).



- **Como acabamos de ver,**

$$Q = A_2 \left\{ \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1-(D_1/D_2)^4]} \right\}^{1/2}$$

Logo,

$$p_1 - p_2 = \frac{Q^2 \rho[1-(D_2/D_1)^4]}{2A_2^2}$$

- **Por outro lado,**

$$\rho = SG\rho_{H_2O} = 0,85 \times 1000 = 850\, kg/m^3$$

- **Considerando a vazão mínima, *Q* = 0,005 m³/s**

$$p_1 - p_2 = \frac{(0{,}005)^2 \times 850 \times [1-(0{,}06/0{,}1)^4]}{2\times[(\pi/4)\times(0{,}06)^2]^2} = 1{,}16\,kPa$$

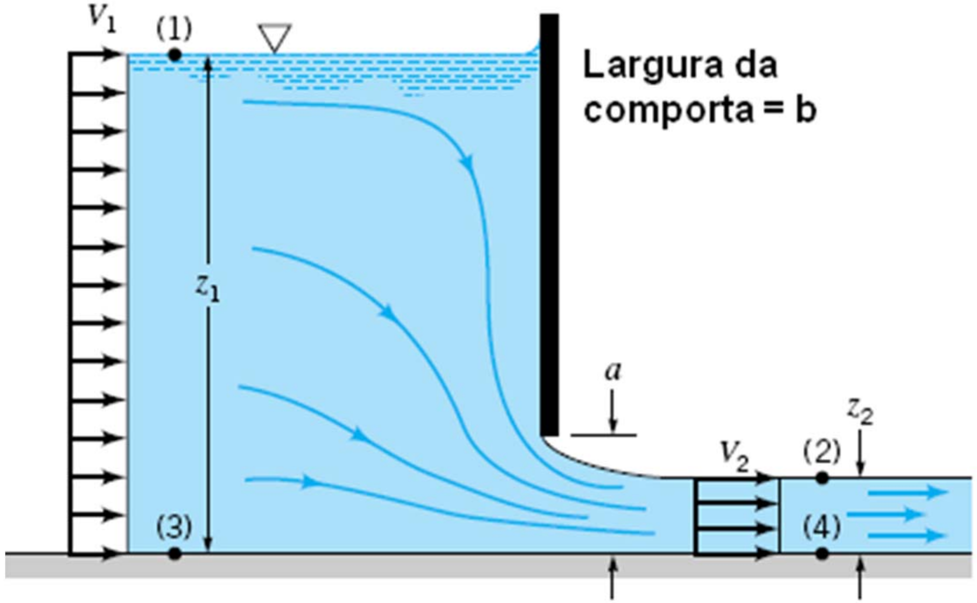
- **Considerando a vazão máxima, *Q* = 0,050 m³/s**

$$p_1 - p_2 = \frac{(0{,}050)^2 \times 850 \times [1-(0{,}06/0{,}1)^4]}{2\times[(\pi/4)\times(0{,}06)^2]^2} = 116\,kPa$$

- **Assim,**

$$1{,}16\,kPa \le p_1 - p_2 \le 116\,kPa$$

Vazões em volume em calhas e canais abertos



$p_1 = p_2 = 0$
Já que estão em contato a atmosfera.

► **Considerando que os pontos (1) e (2) estejam na mesma linha de corrente, temos,**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma\, z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma\, z_2$$

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \gamma\, z_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma\, z_2$$

Universidade Federal do ABC

- **Continuando,**

$$\frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = \gamma(z_1 - z_2)$$

$$\frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) = \rho g(z_1 - z_2)$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g(z_1 - z_2) \qquad (*)$$

$$e$$

$$Q = A_1V_1 = z_1bV_1 = A_2V_2 = z_2bV_2$$

$$V_1 = \frac{V_2 z_2}{z_1} \qquad (2*)$$

$$Logo, (2*)\ em\ (*)$$

$$V_2^2 - \left(\frac{V_2 z_2}{z_1}\right)^2 = 2g(z_1 - z_2)$$

$$V_2^2\left[1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right] = 2g(z_1 - z_2)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \times g \times (z_1 - z_2)}{1 - (z_2 / z_1)^2}}$$

$$mas,\ Q = V_2 A_2.\ Portanto,$$

$$Q = z_2 b \sqrt{\frac{2 \times g \times (z_1 - z_2)}{1 - (z_2 / z_1)^2}}$$

▶ **O resultado,**

$$Q = z_2 b \sqrt{\frac{2 \times g \times (z_1 - z_2)}{1 - (z_2 / z_1)^2}}$$

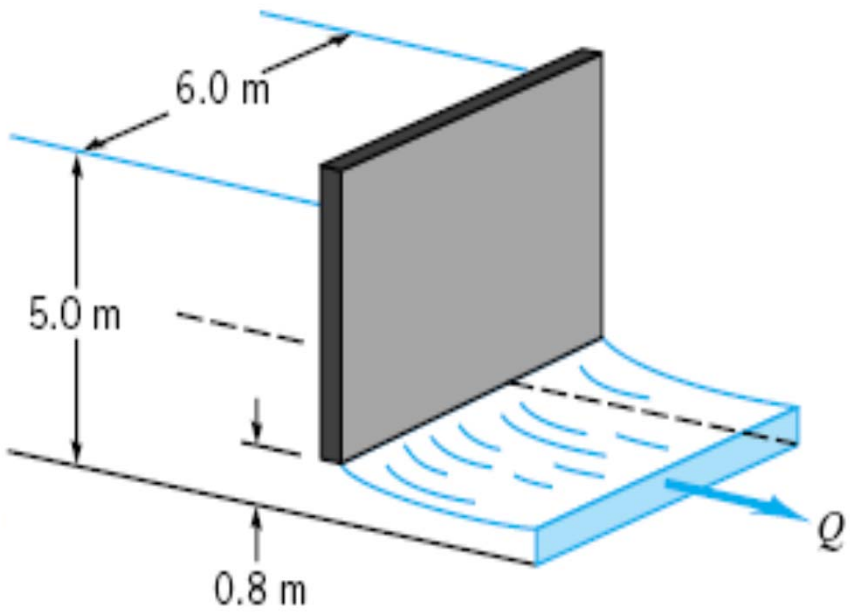
Mostra que a vazão em volume depende da jusante, *z_2*, e não da abertura da comporta, *a*. Isto porque o fluido não é capaz de fazer uma curva de 90º.

▶ **O coeficiente de contração é** $C_C = \frac{z_2}{a} < 1$

▶ **Um valor típico para *C_C* é *0,61* na faixa 0 < *a*/z_1 < 0,2, mas o valor de *C_C* cresce rapidamente quando a relação *a*/z_1 aumenta.**

Exercício

A água escoa sob a comporta deslizante mostrada na figura abaixo, estime o valor da vazão em volume por unidade de comprimento do canal.



▶ **Como vimos,**

$$\frac{Q}{b} = z_2 \sqrt{\frac{2 \times g \times (z_1 - z_2)}{1 - (z_2 / z_1)^2}}$$

▶ **Não é fornecido z_2, mas sabemos que, a/z_1=0,16, portanto, dentro do intervalo 0 < a/z_1 < 0,2. Assim, vamos admitir que C_C = *0,61.* Desta forma, podemos estimar z_2,**

$$z_2 = C_C \times a = 0{,}61 \times 0{,}8 = 0{,}488\, m$$

$$Daí,$$

$$\frac{Q}{b} = 0{,}488 \sqrt{\frac{2 \times 9{,}81 \times (5 - 0{,}488)}{1 - (0{,}488 / 5)^2}} = 4{,}61 m^2 / s$$

▶ **Em tempo, se for possível assumir z_1 >> z_2, então, obteríamos,**

$$\frac{Q}{b} = z_2\sqrt{2 \times g \times z_1} = 4{,}83\, m^2 / s$$

$$ou$$

$$Q = b \times 4{,}83\ (m^3 / s)$$

$$Como\ \ b = 6m,$$

$$Q = 6 \times 4{,}83 \approx 29\,(m^3 / s)$$

Universidade Federal do ABC

3.7 Linha de Energia, ou carga total, ou Piezométrica

► **A equação**

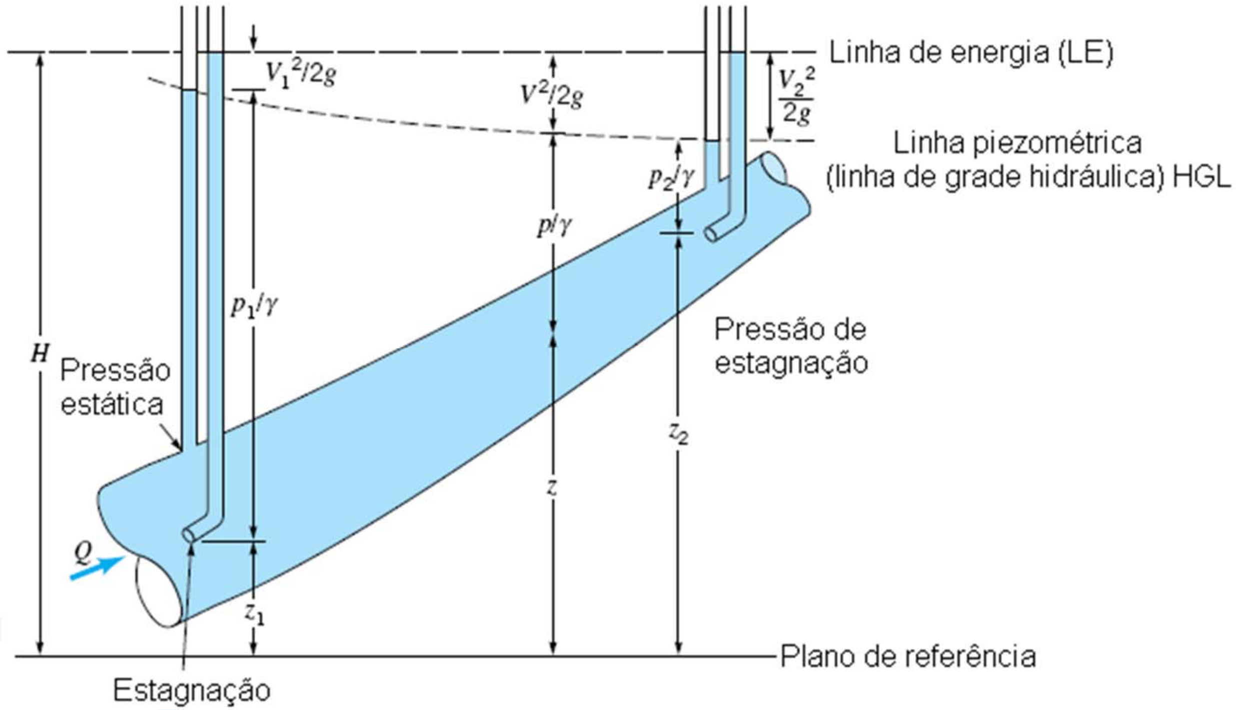
$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=Constante\ ao\ longo\ da\ linha\ de\ corrente$$

Também é uma equação de conservação de energia Mecânica.

► **A equação estabelece que a soma das cargas de pressões permanece constante ao longo da Linha de corrente. Esta constante é chamada de carga total, *H,* isto é.**

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}+z=H$$

Interpretação geométrica



► **A elevação, *H*, corresponde à linha de energia e é obtida pela pressão de estagnação medida no tubo de Pitot.**

► A pressão de estagnação fornece a medida da carga (ou energia) total do escoamento.

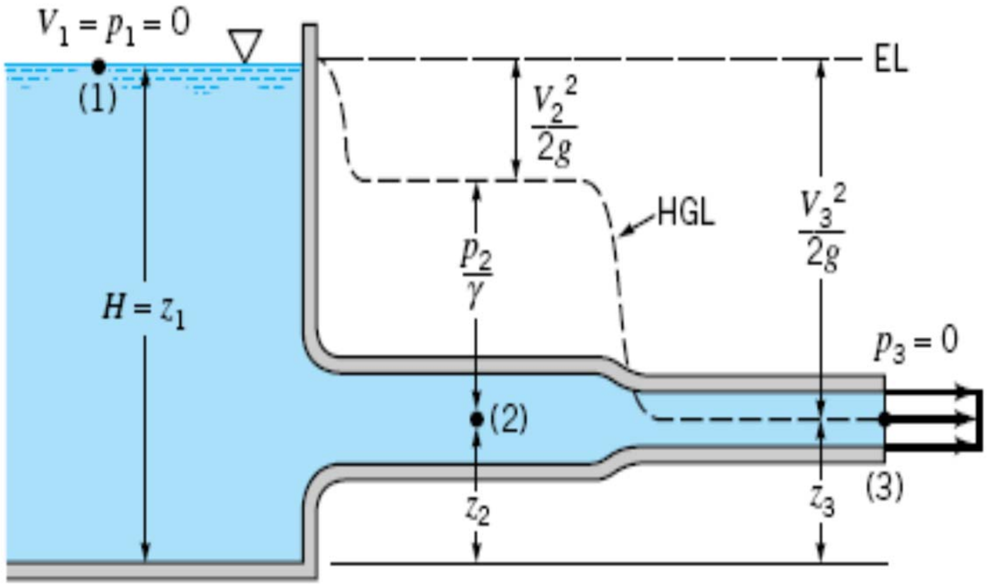
► A pressão estática medidas pelos tubos piezométricas mede a soma da carga de elevação, $p/\gamma + z$, e é denominada carga piezométrica.

► O lugar geométrico das elevações obtidas com um tubo de Pitot num escoamento é denominada de linha de energia.

► Se o escoamento for permanente, invíscido e incompressível, a linha de energia é paralela à horizontal local e passa pela superfície livre do líquido.

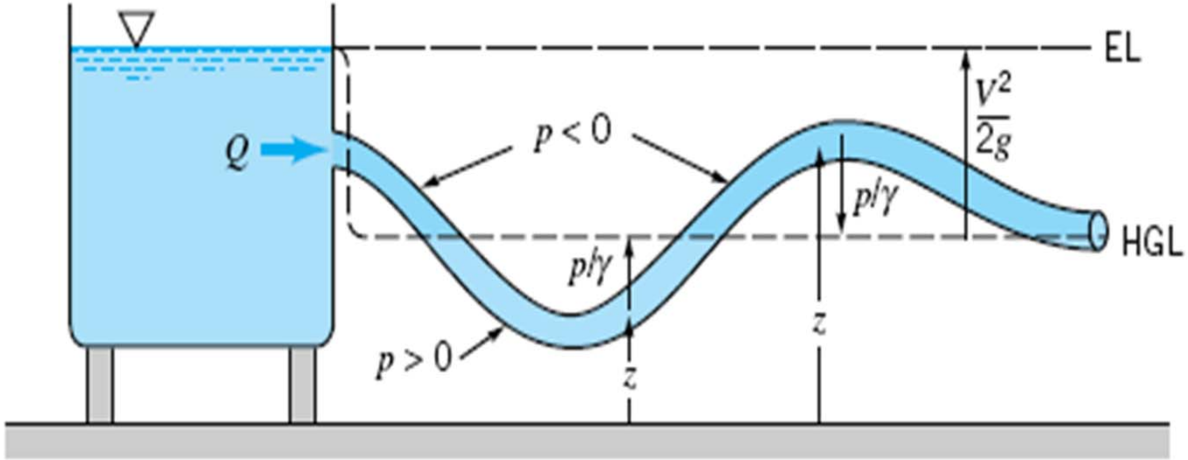
► Se a velocidade do fluido aumenta ao longo da linha de corrente, a linha piezométrica não será horizontal.

- A linha piezométrica dista $V^2/2g$ da linha de energia.



- A distância entre a tubulação e a linha piezométrica indica qual a pressão no escoamento.

Universidade Federal do ABC



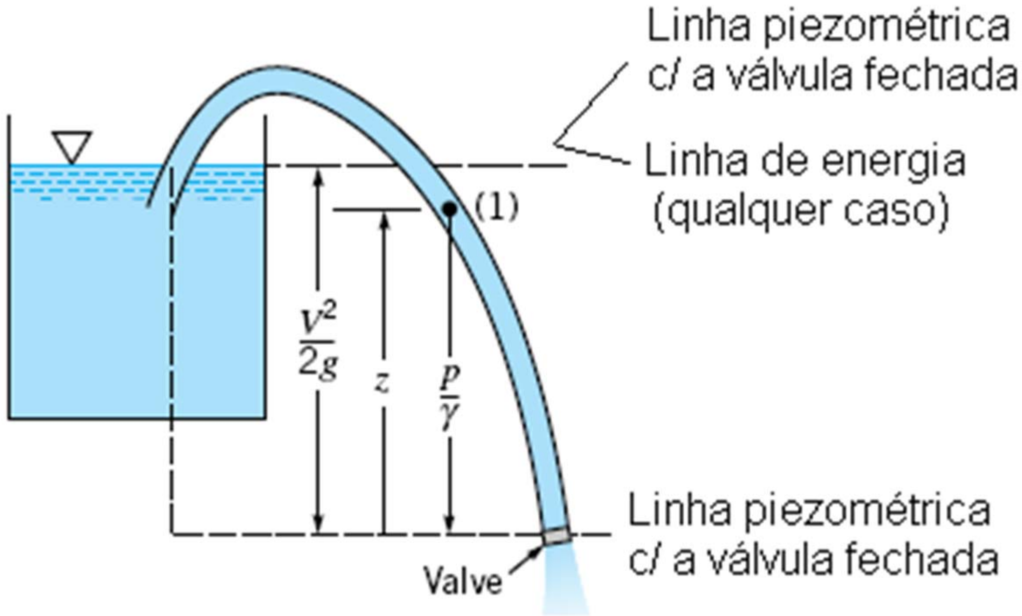
► Se o trecho da tubulação estiver acima da linha piezométrica, a pressão é negativa (abaixo da pressão atmosférica).

► Se o trecho da tubulação estiver abaixo da linha piezométrica, a pressão é positiva (acima da pressão atmosférica).

► Estes dois fatos nos permitem, se conhecida a linha piezométrica, identificar as regiões nas quais as pressões são positivas ou negativas.

Exercício

A figura abaixo mostra a água sendo retirada de um tanque através de uma mangueira que apresenta diâmetro constante. Um pequeno furo é encontrado no ponto (1) da mangueira. Nós identificaremos um vazamento de água ou de ar no furo.



- **Se $p_1 < p_o$ (pressão atmosférica), haverá vazamento de ar para o escoamento.**

- **Se $p_1 > p_o$ (pressão atmosférica), haverá vazamento de água da mangueira.**

- **Carga total é constante.**

- **Diâmetro da mangueira é constante, logo $Q = AV = const.$**

- **Se a válvula estiver aberta, a linha piezométrica estará $V^2/2g$ abaixo da linha de energia (a mesma altura da descarga/válvula).**

- **Se a válvula estiver fechada, a linha piezométrica é a mesma da linha de energia.**

- **Todos os pontos da mangueira tem pressão menor que atmosférica. Portanto, vazará ar para o escoamento.**

3.8 Restrições para utilização da equação de Bernoulli

► Como sempre, o escoamento deve ser permanente, invíscido e incompressível.

► Pressão de estagnação – pressão estática = $\rho V^2/2$, desde que a massa específica permaneça constante.

► Para um gás perfeito, o escoamento só pode ser considerado incompressível se:

- T = 15 ºC;
- Mach = 0,3
- c (velocidade do som) = 332 m/s

Assim, um escoamento com V = c x Mach = 96 m/s ainda pode ser considerado incompressível.

- **A equação de Bernoulli só se aplica para 2 pontos de mesma linha de corrente e não pode haver sumidouros ou fontes de energia.**

- **Dispositivos mecânicos como turbinas (sumidouros) ou bombas (fontes de energia) requerem que a equação de Bernoulli seja alterada para considerá-los.**