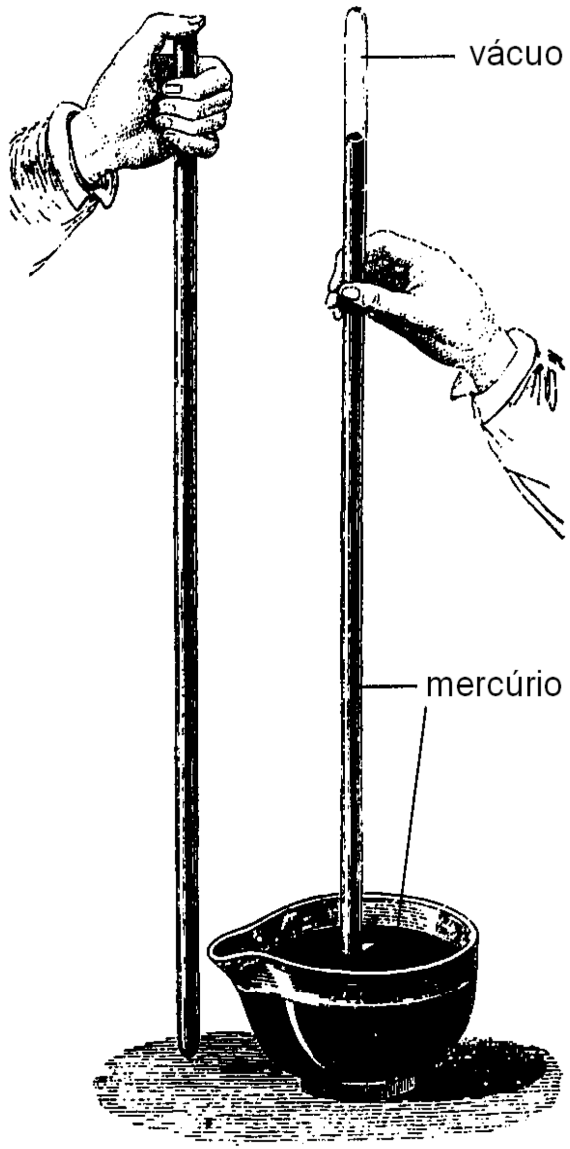
Capítulo 2 – Estática dos Fluidos

2.1 A experiência de Torricelli

► A descoberta do princípio do barômetro ("tubo de Torricelli", "vácuo de Torricelli") aconteceu em 1643.

► Evangelista Torricelli (1608 - 1647) físico e matemático ita- liano (foi aluno de Galileu).

► Foi homenageado com a unidade de pressão torricelli (símbolo torr).



A experiência

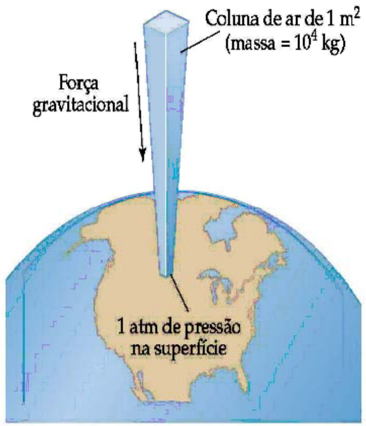
Pressão atmosférica normal

► **Consideramos a pressão atmosférica normal, quando ela é capaz de equilibrar uma coluna de mercúrio de 76cm de altura. Representamos, simbolicamente,**

1 atm = 76 cm Hg = 1,013 x 10^5 Pa, ou aproximadamente: 1 atm ≅ 10^5 Pa ≅ 0,1 MPa.

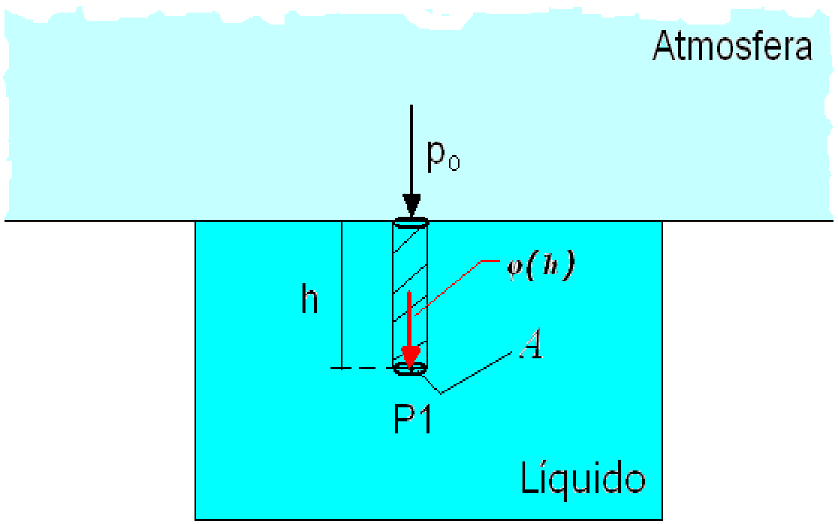
► **Propriedades da Atmosfera padrão Americana ao nível do mar,**

Temperatura, T	**288,15 K (15 ºC)**
Pressão, *p*	**101,33 kPa (abs)***
Massa específica, ρ	**1,225 kg/m³**
Peso específico, $\gamma = \rho g$	**12,014 N/m³**
Viscosidade dinâmica, μ	**1,789 x 10^{-5} Ns/m²**



2.2 Variação de Pressão num Líquido em repouso (versão simplificada)

► **Nos casos nos quais a hipótese do peso específico constante é considerada (líquidos) temos:**



$$p_1 = p_0 + \varphi(h)$$

onde $\varphi(h)$ *é a pressão relativa à interface líquido – atmosfera da coluna, h, do Líquido. Isto é,*

$$\varphi(h) = \frac{m_{fluido}\, g}{A}, \quad e$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V = \rho A h$$

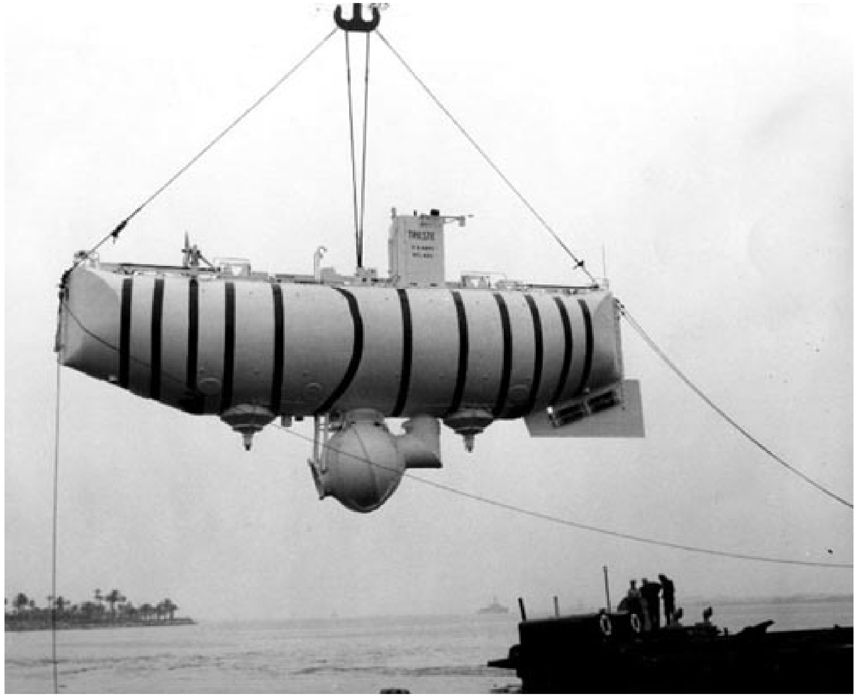
Logo,

$$\varphi(h) = \rho g h, \quad e$$

$$p_1 = p_0 + \rho g h$$

Exercício

1) Os batiscafos são utilizados para mergulhos profundos no oceano. Qual a pressão no batiscafo se a profundidade de mergulho é 6 km? Admita que o peso específico da água do mar é constante e igual a 10,1 kN/m³.



Solução

A pressão devido aos $6\,km$ *de água sobre o batiscafo é,*

$$p = \gamma_{água\,mar} h = 10{,}1\times10^{3}\,\frac{N}{m^{3}}\times 6\times10^{3}\,m = 60{,}6\times10^{3}\,\frac{N}{m^{2}}$$

A pressão absoluta, por sua vez, vale,

$$p(abs) = p_{atm} + p = 101{,}3\,kPa + 60{,}6\times10^{3}\,\frac{N}{m^{2}}$$

$$p(abs) = 60701{,}3\,kPa$$

Ponderações

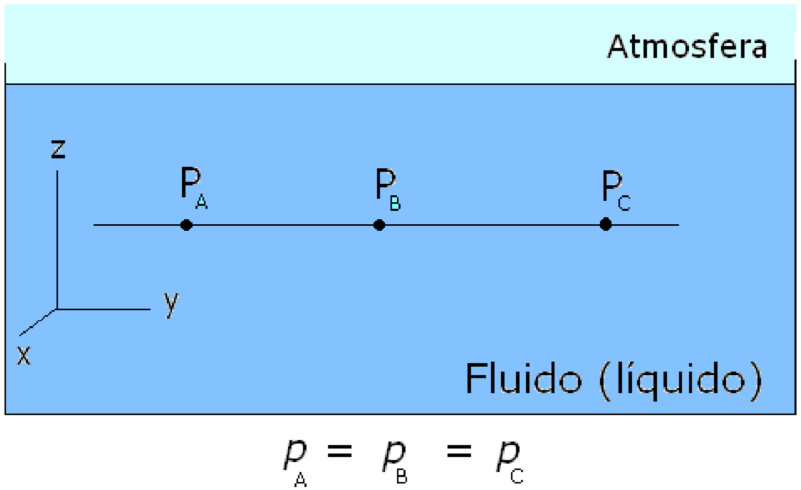
Variações de pressão de um fluido em repouso ou em movimento (versão moderada).

► **Com o tratamento matemático adequado, mostra-se que:**

1. Para um fluido em repouso, ou em movimento, no qual a tensão de cisalhamento é nula, tem-se que a pressão independe da direção, já que ela é o resultado do bombardeamento das moléculas do fluido, como vimos no capítulo 1 (Lei de Pascal).

Universidade Federal do ABC

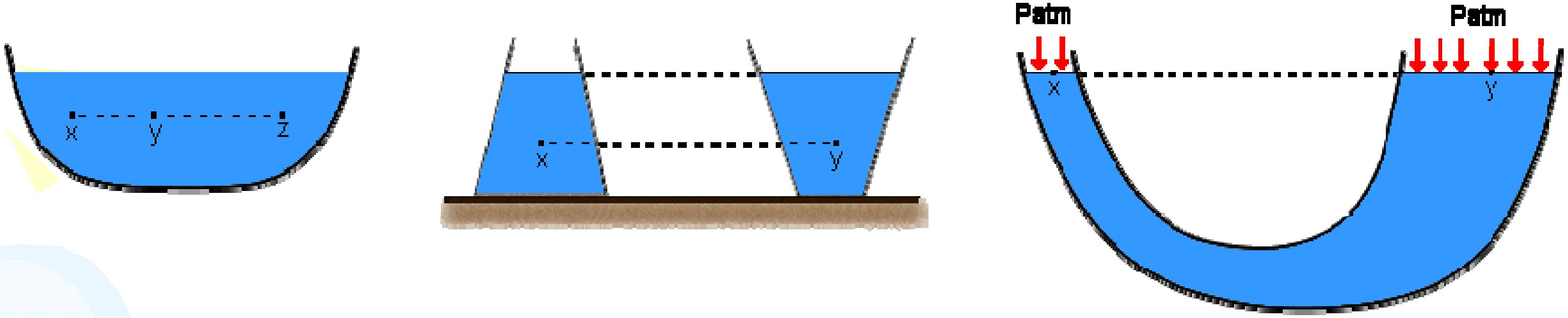
2. A pressão ao longo de um plano paralelo à interface líquido-atmosfera é constante.



$$p_A = p_B = p_C$$

► **Os pontos A, B e C são ditos isóbaros.**

- ▶ **Vasos comunicantes.**



- ▶ **Constatação experimental.**

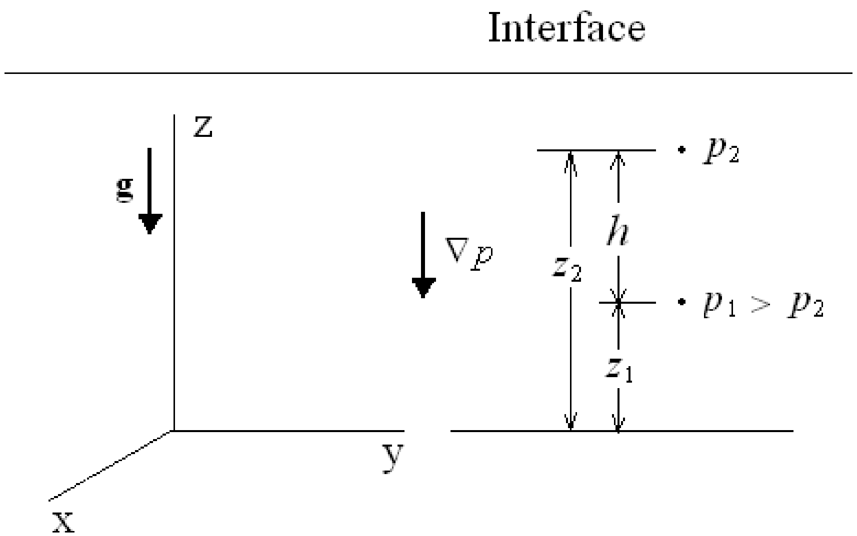
Universidade Federal do ABC

3. O Gradiente de pressão é:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k = -\gamma \mathbf{k} \quad ou \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

Isto significa que em um fluido em repouso ou em movimento, no qual a tensão de cisalhamento seja inexistente, a pressão aumenta no sentido oposto ao determinado pelo eixo-z (Isto é, no mesmo sentido da gravidade e devido ao peso da massa de fluido sobre o ponto considerado).

Como vimos no *slide* 4, isto independe da área da superfície ao redor do ponto considerado.



- **Daí, integrando a última equação:**

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = -\gamma$$

$$\frac{dp}{dz}dz = -\gamma dz \quad \left(Lembrando\ que\ \frac{dp}{dz}dz = dp \right)$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \quad (Supondo\ \gamma\ constante)$$

$$Logo:$$

$$p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1) \quad ou \quad p_1 = p_2 + \gamma h \quad (h = z_2 - z_1)$$

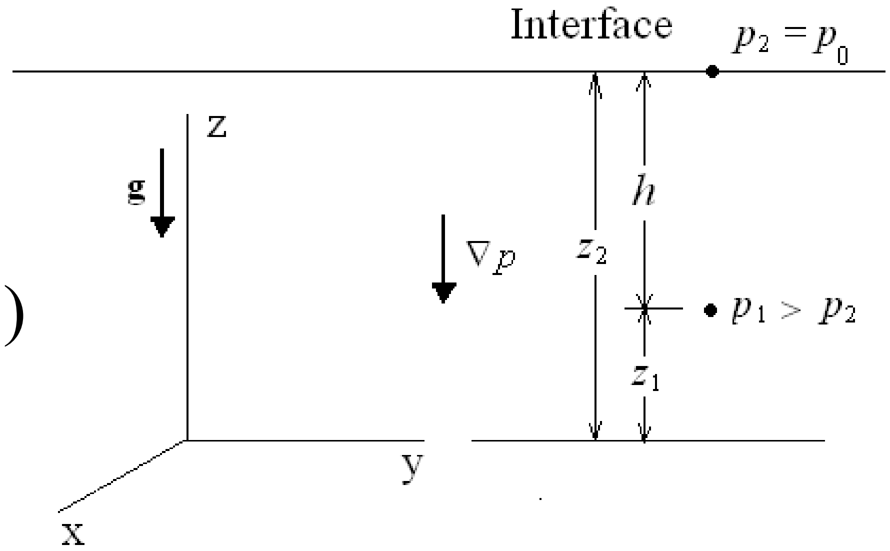
Universidade Federal do ABC

► Se p_2 estiver na interface líquido-atmosfera, então, p_2 = p_0, e

$$p_1 = p_0 + \gamma h$$

ou

$$p_1 = p_0 + \rho g h \quad (\gamma = \rho g)$$



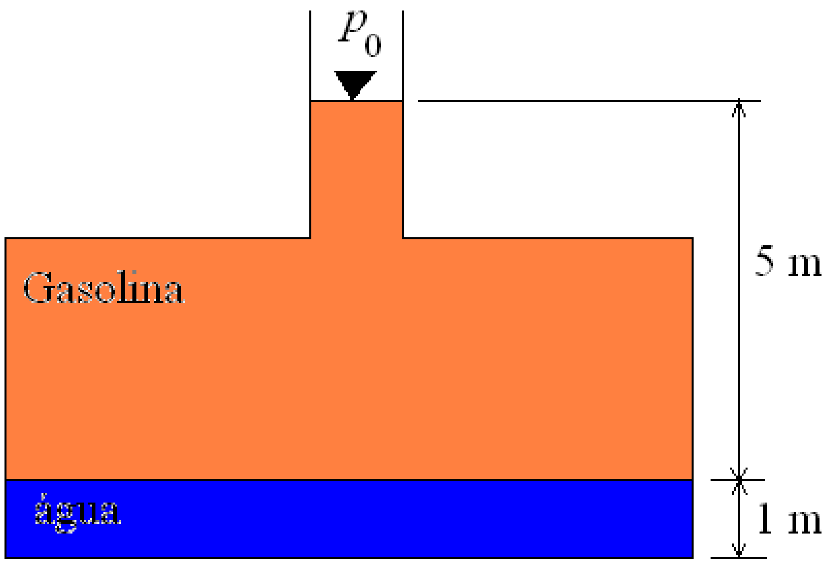
► A quantidade $h = \dfrac{p_1 - p_2}{\gamma}$

é chamada de carga e é interpretada como a altura do coluna de fluido de peso específico γ necessária para provocar uma diferença de pressão $p_1 - p_2$.

► Existe uma prova matemática mais abrangente no livro texto (Young).

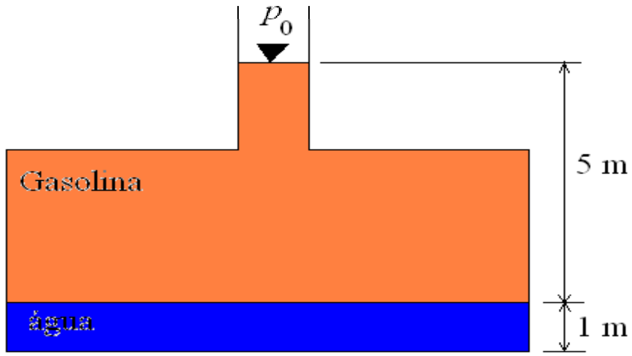
Exercício

2. A Figura abaixo mostra o efeito da infiltração de água em um tanque subterrâneo de gasolina. Se a densidade da gasolina é 0,68; determine a pressão na interface gasolina-água e no fundo do tanque.



Solução

$A\ \ pressão\ \ na\ \ interface\ \ gasolina - água\ \ onde\ \ está\ \ o\ \ ponto\ \ P\ \ é$



$$p = p_0 + \gamma_{gasolina}\, h$$

ou

$$p = p_0 + \rho_{gasolina}\, gh$$

$$Por\ \ outro\ \ lado,\ \ SG = \frac{\rho_{gasolina}}{\rho_{água\,4\,^oC}} \therefore \rho_{gasolina} = 0{,}68 \times 1000 = 680\frac{kg}{m^3}$$

Daí,

$$p = 101{,}3\,kPa + 680\frac{kg}{m^3} \times 5m \times 9{,}81\frac{m}{s^2} = 101{,}3\,kPa + 33{,}354 \times 10^3\ \frac{N}{m^2}$$

$$p = 101{,}3\,kPa + 33{,}354\,kPa = 134{,}654\,kPa$$

Universidade Federal do ABC

Pressão no fundo do tanque

É a pressão na interface gasolina – água (a pressão no ponto P) somada à pressão devida a coluna de 1m de água.

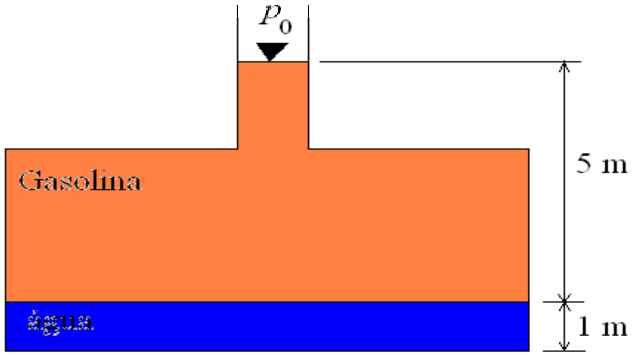
$$p_{fundo} = p + \gamma_{água}\, h$$

ou

$$p_{fundo} = p + \rho_{água}\, g h$$

$$p_{fundo} = 134{,}654\, kPa + 1000\frac{kg}{m^3}\, 9{,}81\frac{m}{s^2}\, 1\, m$$

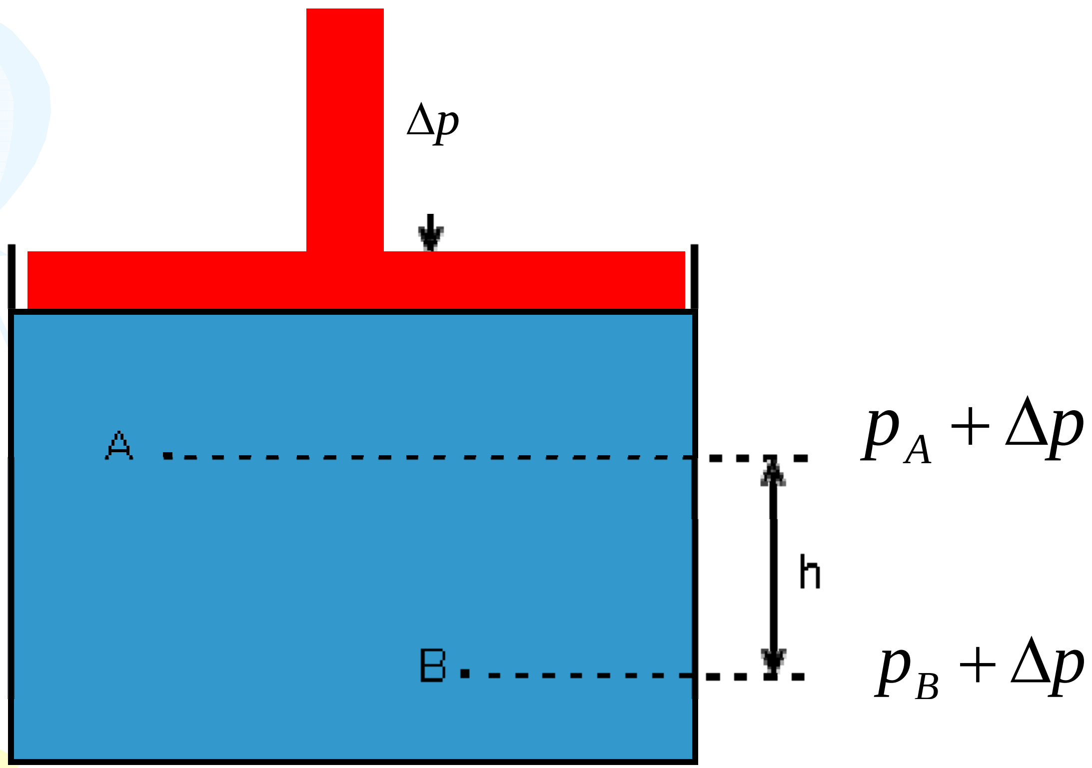
$$p_{fundo} = 144{,}464\, kPa$$



Universidade Federal do ABC

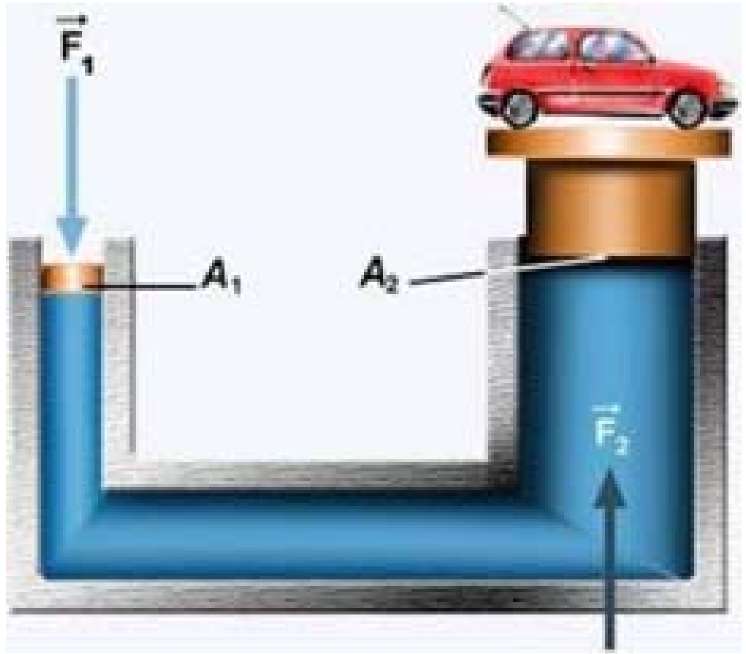
Algumas aplicações do Princípio de Pascal

"Todo acréscimo de pressão exercido num ponto da massa líquida se transmite integralmente para todos os pontos do líquido."



► Aplicações

► Consideremos dois cilindros contendo um líquido e fechados por êmbolos de áreas A1 e A2.



► Aplicando-se sobre o êmbolo de área A1 uma força F1,

► Produz-se um acréscimo de pressão

$$\Delta p = F_1 / A_1$$

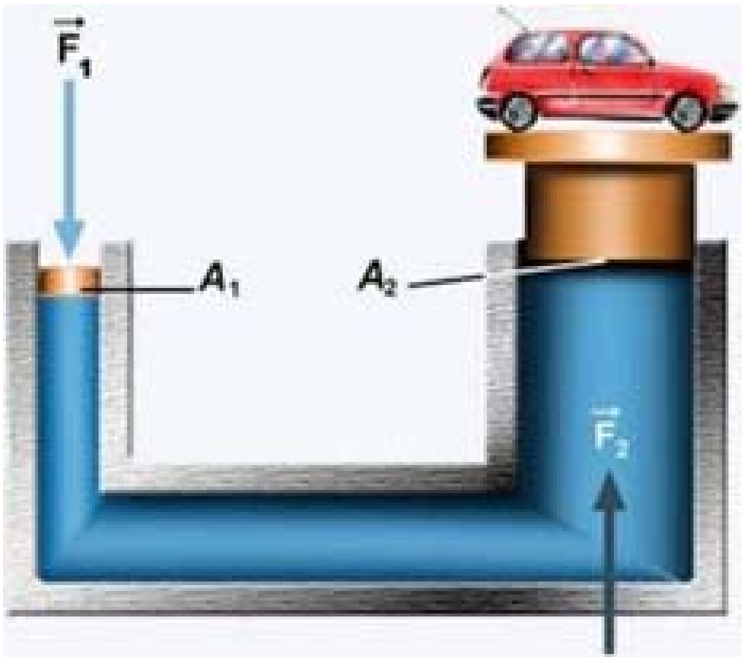
que se transmite integralmente para o outro êmbolo, o que acarreta

$$\Delta p = F_2 / A_2$$

ou seja, as forças são proporcionais às áreas.

Exercício

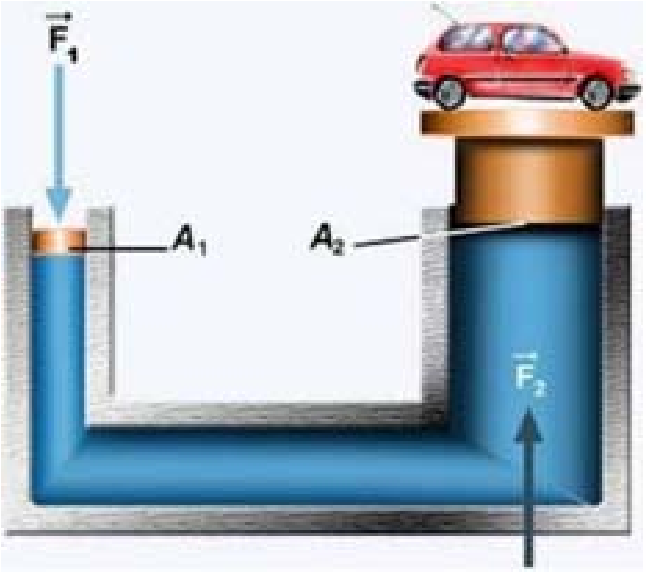
Considere o esquema mostrado na figura em que a massa do automóvel é de 1500 kg, A_1 = 0,5 m^2 e A_2 = 7 m^2. Determine a força que deve ser aplicada à área A_1 para manter o sistema em equilíbrio.



Pressão no fundo do tanque

A aplicação direta do princípio de Pascal nos dá,

$$\left.\begin{aligned}\Delta p &= \frac{F_1}{A_1}\\ \Delta p &= \frac{F_2}{A_2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$



$$Logo,\ F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{0{,}5}{7}(1500 \times 9{,}81) = 107{,}14\, N$$

Notemos que $1051{,}7\, N$ *corresponde ao peso de uma massa de* $107{,}14\ kg$

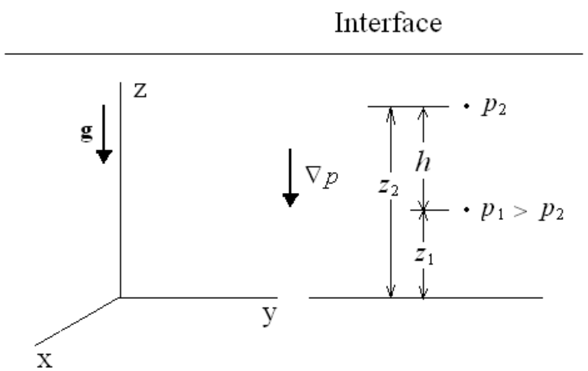
2.4 Fluido compressíveis (gases) em repouso ou movimento

► **Admitindo que as tensões de cisalhamento sejam nulas também nesse caso.**

► **Para os gases ideais: *p = ρRT.* Então,**

$$\rho = \frac{p}{RT} \Rightarrow \gamma = \rho g = \frac{pg}{RT}$$

$$Logo,\ substituindo\ \ em\ \frac{dp}{dz} = -\gamma,\ vem\ que$$



$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT}.\ \ Integrando,$$

$$\int_{p}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} \int_{z_1}^{z_2} dz \quad ou \quad \int_{p}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T(z)} \quad se \quad T = T(z)$$

► **Admitindo que a temperatura não varie em função de z. Isto equivale a considerar que a pressão varia em função de z em uma camada isotérmica do gás perfeito. Temos,**

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}\int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\frac{g}{RT}(z_2 - z_1)$$

$$Logo,$$

$$p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT}\right]$$

► **Para distribuições de pressões em camadas não isotérmicas, o procedimento é o mesmo.**

2.5 Medições de pressão

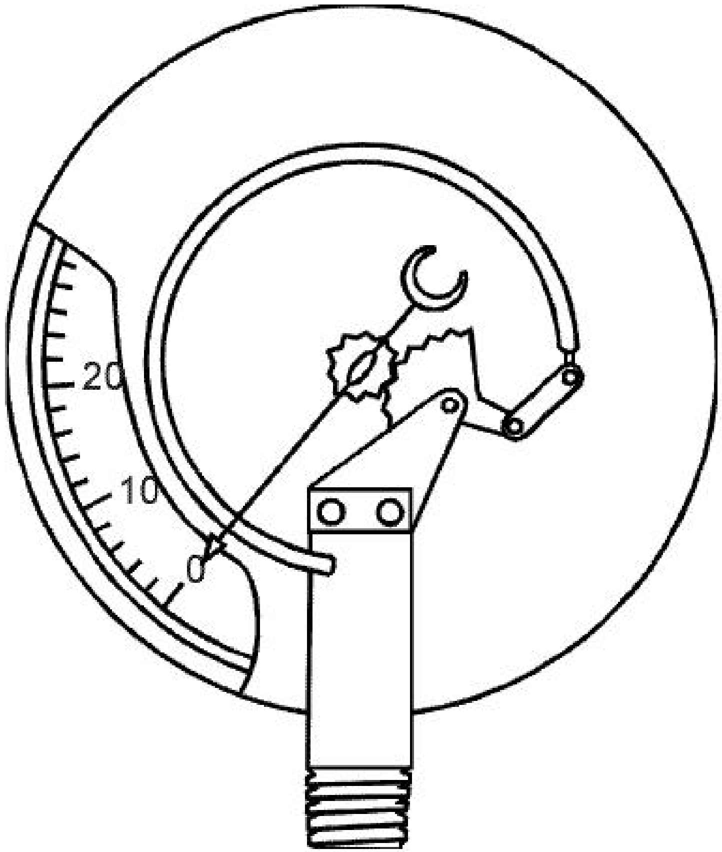
► **Manometria:** Corresponde às técnicas de construção de instrumentos para medir a pressão, bem como as técnicas aplicadas às medidas.

► **Pressão Manométrica:** É a diferença entre a pressão em um local e a pressão atmosférica.

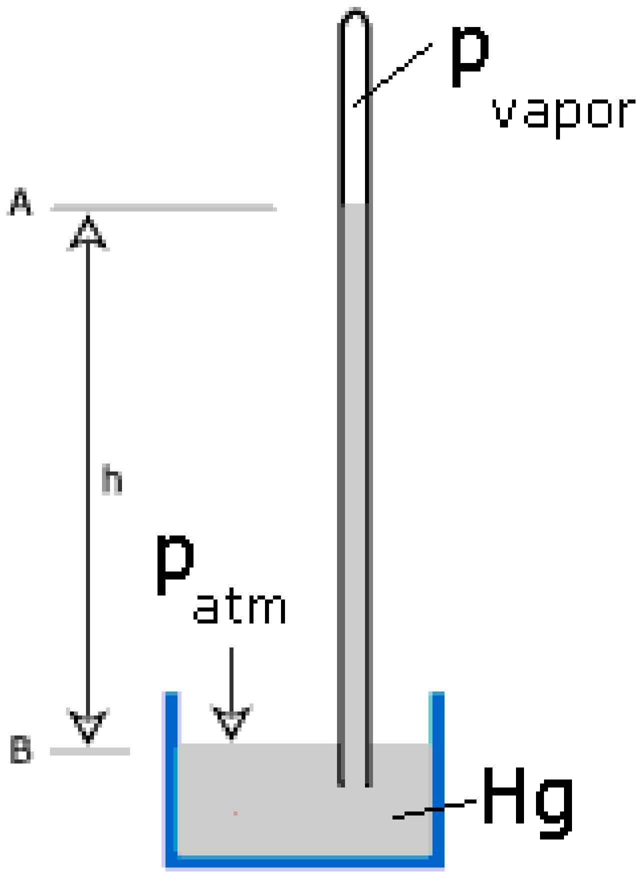
Exemplo

- Abrindo o registro, o CO_2 escapa do interior do cilindro enquanto a sua pressão for maior que a pressão atmosférica.
- Quando as pressões se igualam, o fluxo cessa.
- A pressão utilizada do CO_2 é a sua pressão manométrica, $p_m = p - p_{atm}$

►**Manômetros:** **São dispositivos utilizados para medir a pressão manométrica.**



Barômetro de Mercúrio



$$p_{atm} = \gamma_{Hg} h + p_{vapor}$$

► Tubo Piezométrico

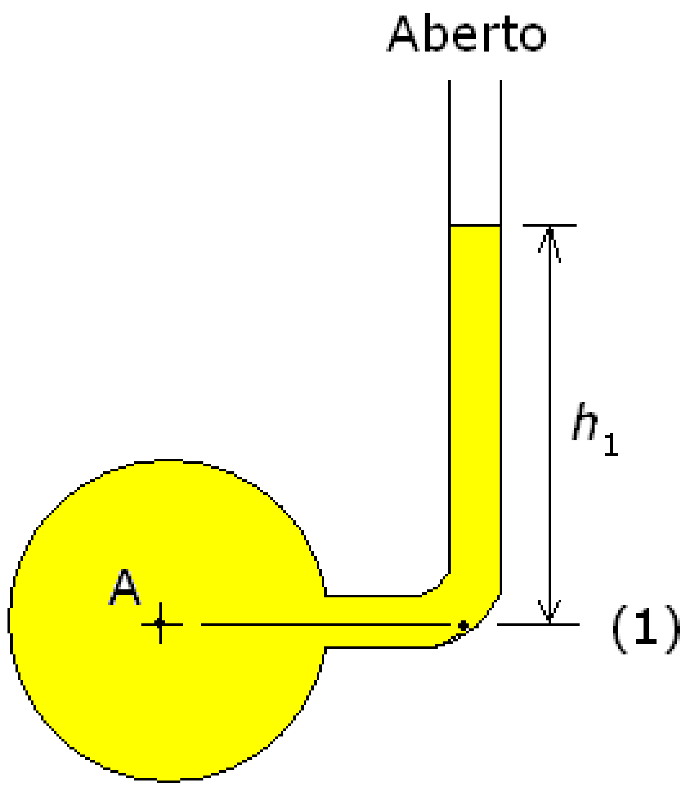
$$p_A = p_1$$

Pressão relativa

$$p_A = \gamma_1 h_1$$

Pressão absoluta

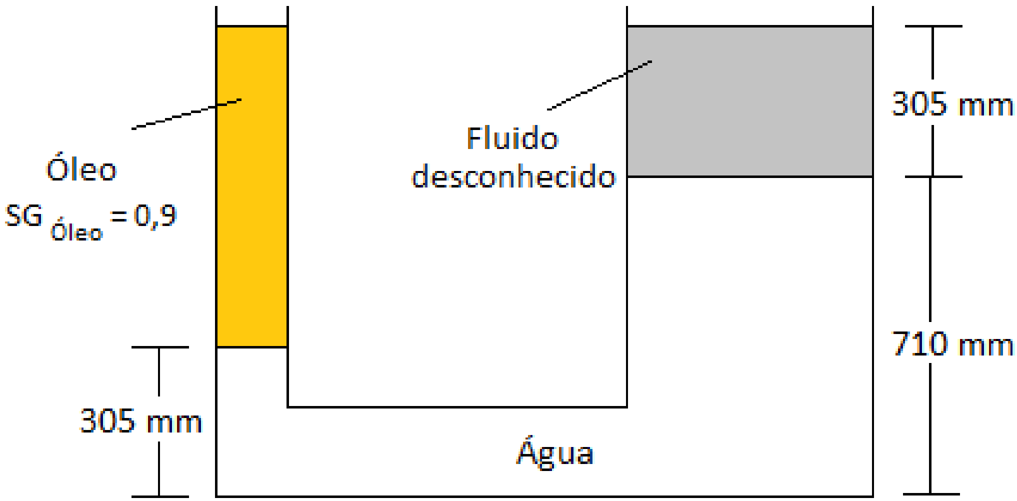
$$p_A = p_{atm} + \gamma_1 h_1$$



Universidade Federal do ABC

Exercício

O tubo em U mostrado na figura abaixo contém três líquidos distintos. Óleo, água e um fluido desconhecido. Determine a densidade do fluido desconhecido considerando as condições operacionais indicadas na figura.



Solução

$Temos: \; p_1 = \gamma_{óleo} h_1$

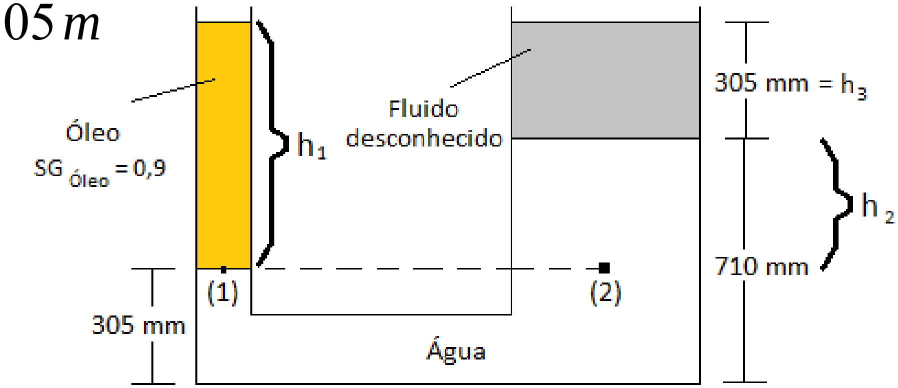
$A \; figura \; ao \; lado \; mostra \; que \; h_1 = 710 + 305 - 305 = 710\,mm$

$ou \; h_1 = 0{,}71\,m$

$Por \; outro \; lado, \; p_1 = p_2 = \gamma_{água} h_2 + \gamma \, h_3$

$A \; figura \; ao \; lado \; mostra \; que \; h_2 = 710 + 305 = 405\,mm$

$ou \; h_2 = 0{,}405\,m \; e \; h_3 = 305\,mm = 0{,}305\,m$



$Daí, \; vem \; que$

$\gamma_{óleo} h_1 = \gamma_{água} h_2 + \gamma \, h_3$

$Como \; \gamma = \rho g, \; então,$

$\rho_{óleo} g h_1 = \rho_{água} g h_2 + \rho g h_3 \Rightarrow \rho_{óleo} h_1 = \rho_{água} h_2 + \rho h_3$

Solução

Universidade Federal do ABC

Agora, vamos dividir a equação $\rho_{óleo} h_1 = \rho_{água} h_2 + \rho h_3$ *por* $\rho_{água}$

$$\frac{\rho_{óleo}}{\rho_{água}} h_1 = h_2 + \frac{\rho}{\rho_{água}} h_3$$

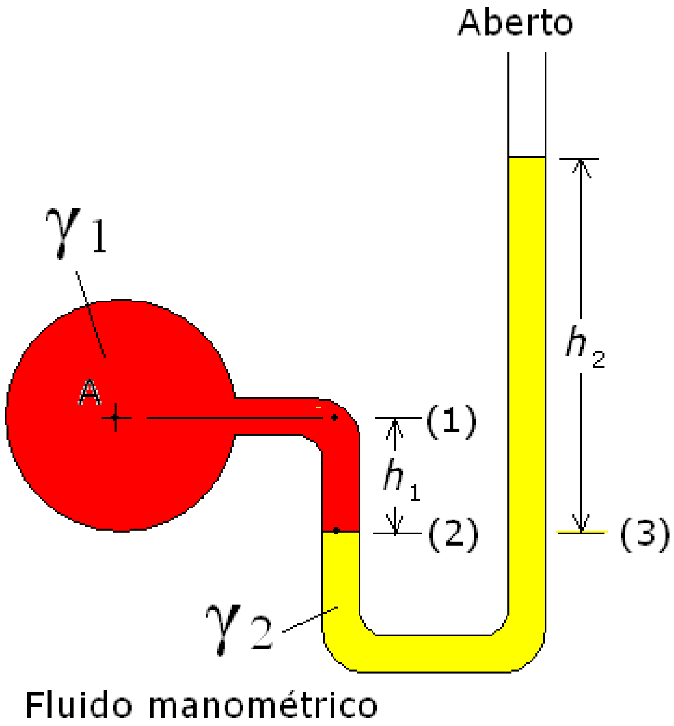
Mas, por definição, $SG = \dfrac{\rho}{\rho_{água}}$. *Daí,*

$$SG_{óleo} h_1 == h_2 + SG h_3$$

Por fim, $SG = \dfrac{SG_{óleo} h_1 - h_2}{h_3} = \dfrac{0{,}90 \times 0{,}71 - 0{,}405}{0{,}305}$

$$SG = 0{,}77$$

► Manômetro com Tubo em U



$Temos: \ p_A = p_1$

Pressão relativa em (2)

$$p_2 = p_A + \gamma_1 h_1$$

Mas, $p_2 = p_3$ *e a pressão relativa em* (3) *é*

$$p_3 = \gamma_2 h_2$$

Daí,

$$p_A + \gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2 \quad ou \quad p_A = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1$$

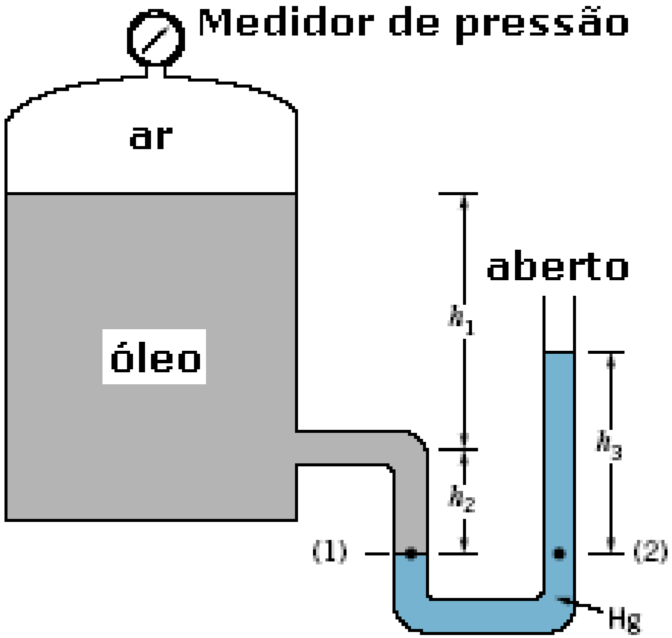
A pressão absoluta em A é,

$$p_A = \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1 + p_{atm}$$

► Se for um gás no recipiente: $\boldsymbol{\gamma_1 h_1 = 0.}$

Exercício

O tanque fechado mostrado na Figura abaixo contém ar comprimido e um óleo que apresenta densidade 0,9. O fluido manométrico utilizado no manômetro em U, conectado ao tanque, é mercúrio (densidade igual a 13,6). Se h_1 = 914 mm, h_2 = 152 mm e h_3 = 229, mm determine a leitura no manômetro localizado no topo do tanque.



Solução

Universidade Federal do ABC

$$Temos: \; p_1 = p_2$$

$$p_1 = p_{AR} + \gamma_{óleo}(h_1 + h_2)$$

$$p_2 = \gamma_{Hg} h_3$$

Logo,

$$p_{AR} + \gamma_{óleo}(h_1 + h_2) = \gamma_{Hg} h_3$$

$$p_{AR} = \gamma_{Hg} h_3 - \gamma_{óleo}(h_1 + h_2)$$

Como:

$$SG_{óleo} = 0{,}90 \Rightarrow \rho_{óleo} = 0{,}90 \times 1000$$

$$\rho_{óleo} = 900\, kg/m^3$$

e:

$$SG_{Hg} = 13{,}6 \Rightarrow \rho_{Hg} = 13{,}6 \times 1000 = 13600\, kg/m^3$$

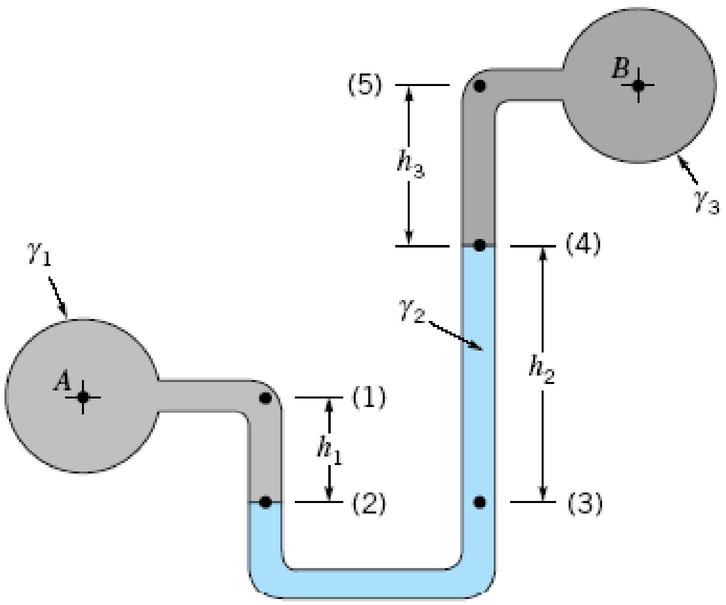
$$\gamma_{Hg} = \rho_{Hg} g = 133416\, kg/m^3$$

Logo,

$$p_{AR} = 133416 \times 0{,}229 - 8829 \times (0{,}914 + 0{,}152)$$

$$p_{AR} = 21140{,}6\, kPa$$

► Manômetro diferencial em U



$$p_A = p_1$$

$$p_2 = p_1 + \gamma_1 h_1 = p_A + \gamma_1 h_1$$

$$p_2 = p_3$$

$$p_3 = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 + p_B$$

e, *ainda*, $p_5 = p_B$

Logo,

$$p_A + \gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 + p_B$$

Portanto,

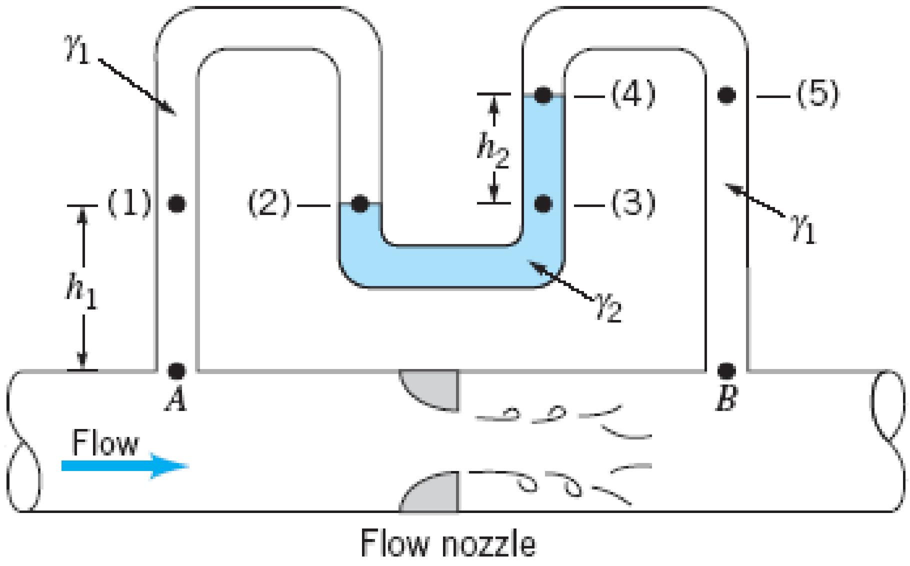
$$p_A - p_B = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

Exercício

A Figura abaixo mostra o esboço de um dispositivo utilizado para medir a vazão em volume em tubos, Q, que será apresentado no cap. 3. O bocal convergente cria uma queda de pressão $p_A - p_B$ no escoamento que está relacionada com a vazão em volume através da equação $Q = K(p_A - p_B)^{1/2}$ (onde K é uma constante que é função das dimensões do bocal e do tubo). A queda de pressão, normalmente, é medida com um manômetro diferencial em U, do tipo ilustrado na figura.

(a) Determine a equação $p_A - p_B$ em função do peso específico do fluido que escoa, γ_1, do peso específico do fluido manométrico, γ_2, e das várias alturas indicadas na figura.

(b) Determine a queda de pressão se γ_1 = 9,80 kN/m³, γ_2 = 15,6 kN/m³, h_1 = 1,0 m e h_2 = 0,5 m.



Universidade Federal do ABC

Solução

Apesar de haver escoamento na parte mais larga do tubo, a porção dos dois fluidos dentro do manômetro estão em repouso. Portanto, podemos usar os conceitos da hidrostárica.

$a)$

$Pressão\ em\ A: p_A = p_1 + \gamma_1 h_1$

$Por\ sua\ vez,\ p_1 = p_2 = p_3$

$já\ \ p_3 = p_4 + \gamma_2 h_2$

$e\ \ p_4 = p_5$

$Por\ outro\ lado,\ p_B = p_5 + \gamma_1(h_1 + h_2)$

$Levando\ em\ conta\ as\ igualdades\ acima,\ temos:$

$p_B = p_4 + \gamma_1(h_1 + h_2),$

$p_4 = p_3 - \gamma_2 h_2$

Seguindo, teremos

$$p_B = p_3 - \gamma_2 h_2 + \gamma_1 (h_1 + h_2),$$

como $p_3 = p_2 = p_1$ *e* $p_1 = p_A - \gamma_1 h_1$, *vem que,*

$$p_B = p_A - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 + \gamma_1 (h_1 + h_2)$$

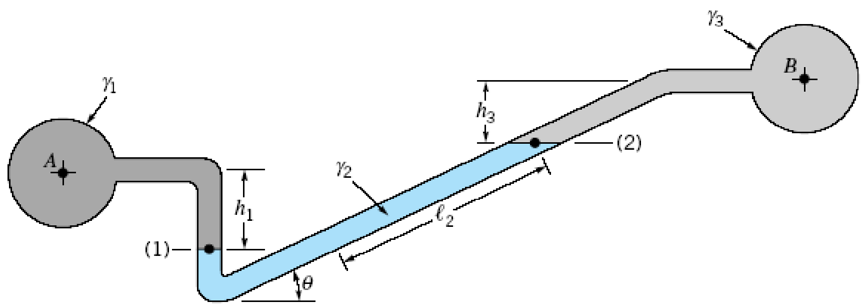
$$p_B = p_A - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 + \gamma_1 h_1 + \gamma_1 h_2$$

$$p_A - p_B = h_2 (\gamma_2 - \gamma_1)$$

$$b)\ p_A - p_B = 0{,}5(15{,}6 \times 10^3 - 9{,}8 \times 10^3)$$

$$p_A - p_B = 2{,}9 \times 10^3\, Pa$$

► Manômetro com tubo inclinado (usado para medir pequenas variações de pressão)



Pressão em $(1): \; p_1 = p_A + \gamma_1 h_1$

p_1 *também corresponde à pressão devida à coluna de altura* $l_2 \operatorname{sen}\theta$ *do fluido de peso específico* γ_2 *e à pressão devida à coluna* h_3 *de fluido de peso específico* γ_3*, mais a pressão em* B*. Ou seja,*

$$p_1 = \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta + \gamma_3 h_3 + p_B$$

Daí,

$$p_A + \gamma_1 h_1 = \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta + \gamma_3 h_3 + p_B$$

e,

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

► **Se os fluidos de pesos específicos γ_1 e γ_3 forem gases, então as pressões devidas às colunas h_1 e h_3 podem ser desprezadas. Nesse caso,**

$$\gamma_1 h_1 = 0$$

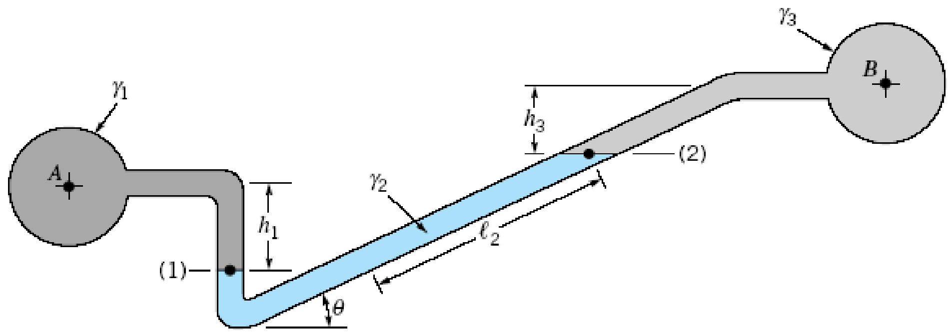
$$\gamma_3 h_3 = 0$$

Logo,

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta$$

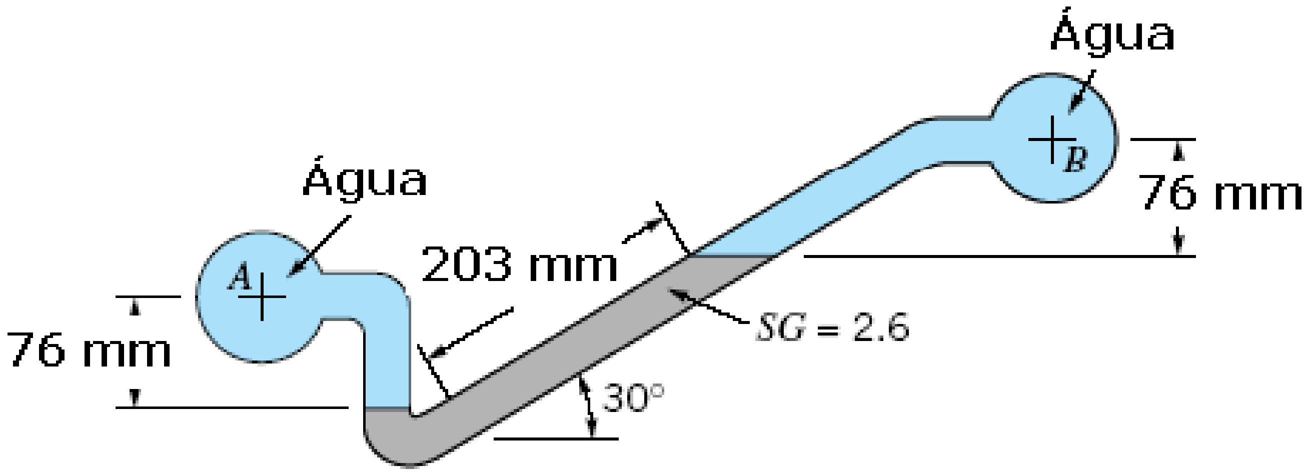
e,

$$l_2 = \frac{p_A - p_B}{\gamma_2 \operatorname{sen}\theta}$$



Exercício

O manômetro inclinado da figura abaixo indica que a pressão no tubo em A é 0,8 psi. O fluido que escoa nos tubos A e B é água e o fluido manométrico apresenta densidade 2,6. Qual é a pressão no tubo B que corresponde à condição mostrada.



Solução

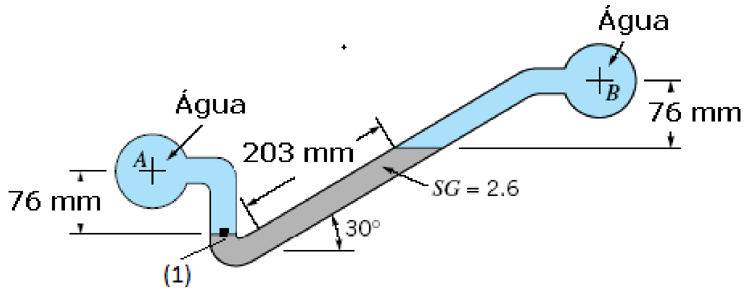
$$h_1 = 76\,mm = 0{,}076\,m$$

$$h_2 = 203 \times \text{sen}(30^o) = 101{,}5\,mm = 0{,}1015\,m$$

$$h_3 = 76\,mm = 0{,}076\,m$$

$$p_A = 0{,}8\,psi = 0{,}8\,lb/pol^2 = 0{,}8 \times 6895\,N/m^2 = 5516\,N/m^2$$

Analisando o esquema,



$$p_1 = p_A + \gamma_{água} h_1$$

e

$$p_1 = \gamma_2 h_2 + \gamma_{água} h_3 + p_B = \gamma_2 l_2 \text{sen}\theta + \gamma_{água} h_3 + p_B$$

Logo,

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 \text{sen}\theta + \gamma_{água} h_3 - \gamma_{água} h_1$$

continuando,

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta + \gamma_{água} h_3 - \gamma_{água} h_1$$

Como $h_1 = h_3$,

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 \operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$

Precisamos calcular γ_2

$$SG = 2{,}6 = \frac{\rho_2}{\rho_{água\,4^o C}} \rightarrow \rho_2 = 2600\,kg/m^3$$

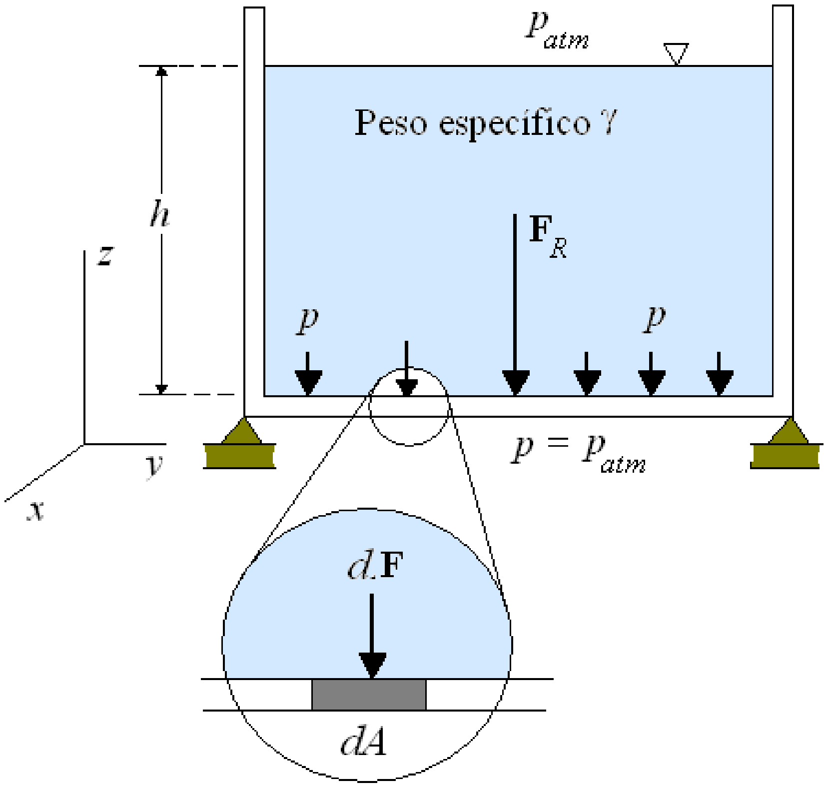
Assim, $\gamma_2 = \rho_2 g = 25506\ N/m^3$

Finalmente, substituindo todos os valores em (1),

$$p_A - p_B = 2{,}59\,kPa \rightarrow p_B = p_A - 2{,}59\,kPa = 5{,}516\,kPa - 2{,}59\,kPa = 2{,}93\,kPa$$

2.5 Força Hidrostática em superfícies planas

► **1º caso, superfície paralela à interface líquido-ar (fundo de um tanque aberto, por exemplo)**



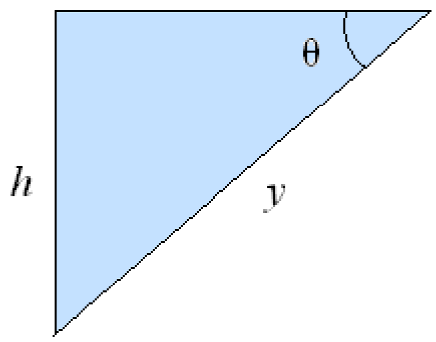
Por definição,

$$dF = \gamma\, h\, dA$$

$$\int_o^{F_R} dF = \int_A \gamma\, h\, dA$$

$$F_R = \gamma\, h\, A \quad ou \quad \mathbf{F}_R = -\gamma\, h\, A\mathbf{k}$$

► 2º caso, superfície plana de forma arbitrária e inclinada em relação à interface líquido-ar (Diques, represas, ...)

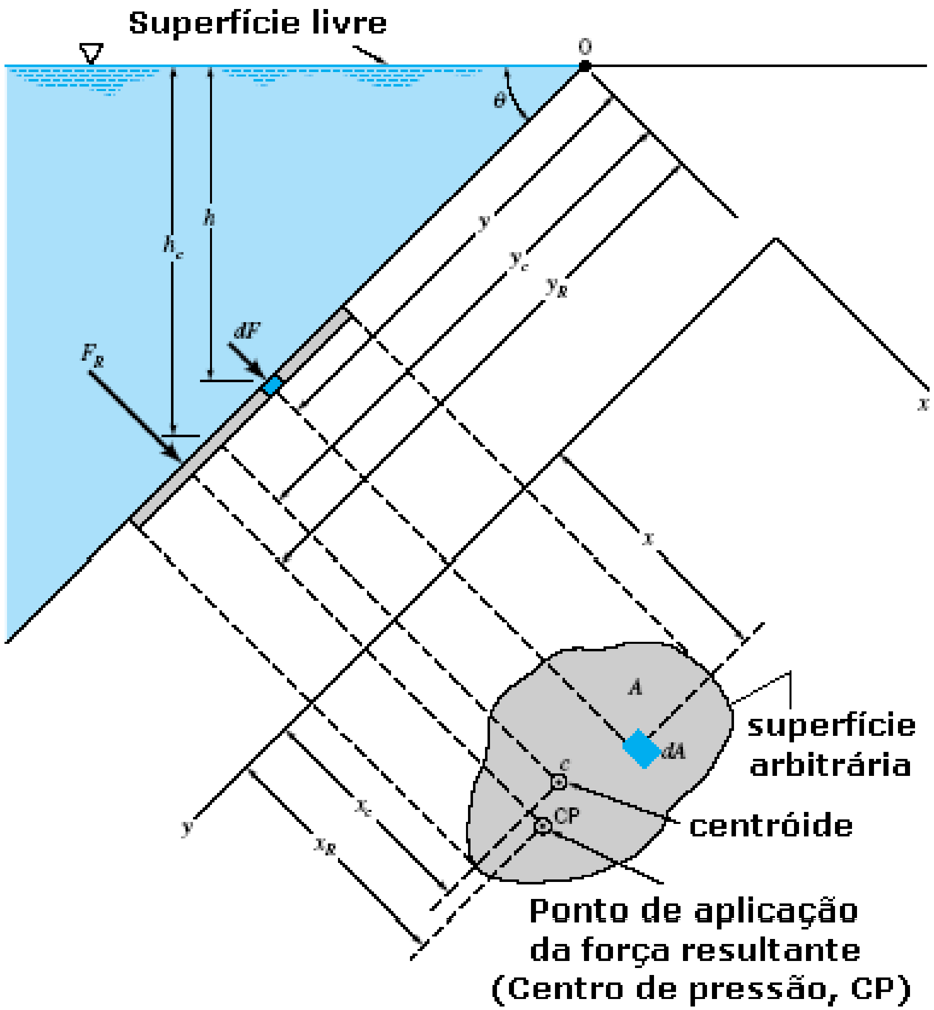


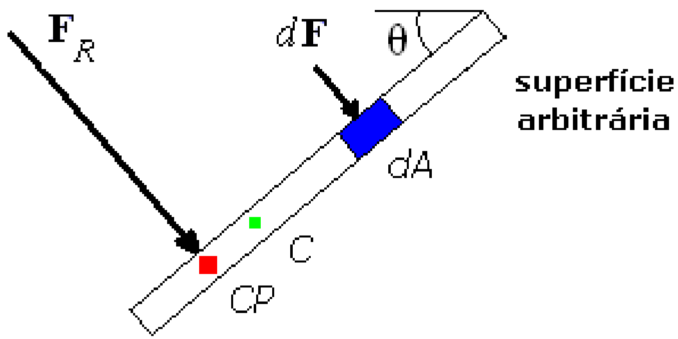
$$dF = \gamma \, h \, dA$$

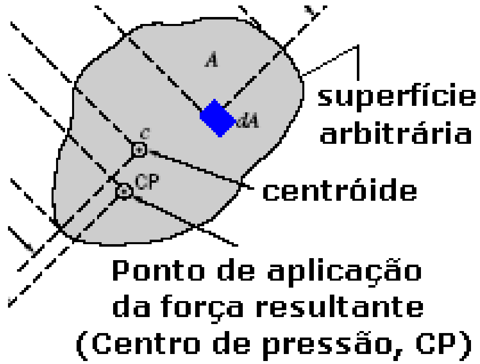
$$h = y \operatorname{sen}\theta$$

$$e$$

$$h_C = y_C \operatorname{sen}\theta$$







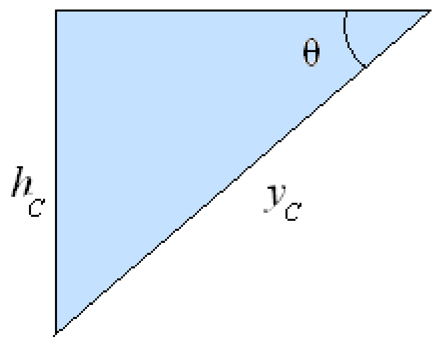
Logo

$$dF = \gamma y \operatorname{sen}\theta dA \rightarrow \int dF = \gamma \operatorname{sen}\theta \int_A y\, dA$$

$$F_R = \gamma \operatorname{sen}\theta \int_A y\, dA$$

$$y_C \operatorname{sen}\theta = h_C$$

A integral $\int_A y\, dA = y_C A$ *é o momento de primeira ordem da área. Portanto,*



$$F_R = \gamma A y_C \operatorname{sen}\theta \quad ou \quad F_R = \gamma h_C A$$

► **A intuição sugere que a direção de ação da força resultante deveria passar pelo centróide da superfície. Mas isso não acontece.**

► **A ordenada do ponto de ação da força resultante, $y_{R,}$ pode ser determinada pela soma dos momentos em torno do eixo-x. Isto é, o momento da força resultante precisa ser igual aos momentos das forças devidas a pressão. Isto é,**

$$\tau_{total} = F_R y_R = \int_A y\, dF = \int_A y\,(\gamma \operatorname{sen}\theta\, y\, dA) = \int_A \gamma \operatorname{sen}\theta\, y^2\, dA$$

$$F_R y_R = \gamma \operatorname{sen}\theta \int_A y^2\, dA$$

$$como\ F_R = \gamma\, A\, y_C \operatorname{sen}\theta,\ então,$$

$$\gamma\, A\, y_C \operatorname{sen}\theta\, y_R = \gamma \operatorname{sen}\theta \int_A y^2\, dA \Rightarrow y_R = \frac{\int_A y^2\, dA}{y_C A}$$

► **A integral do numerador da última equação é o momento de inércia em relação ao eixo-x, I_x (eixo formado pela intersecção do plano que contém a superfície arbitrária e a superfície livre). Assim,**

$$y_R = \frac{I_x}{y_C A}$$

► **I_x pode ser obtido pelo teorema dos eixos paralelos,**

$$I_x = I_{xc} + A y_C^2$$

Logo,

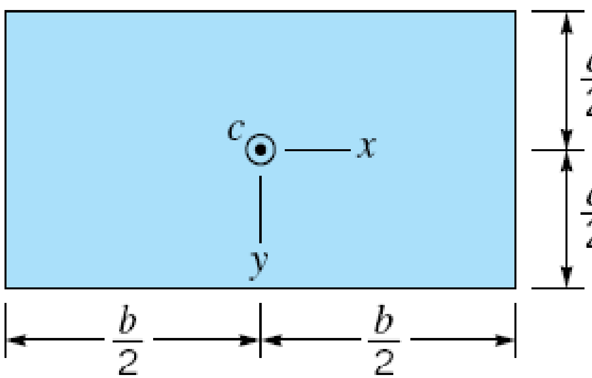
$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_C A} + y_C$$

Analogamente, mostra-se que

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_C A} + x_C$$

- **Mostra-se que a força resultante não passa através do centróide, mas sempre atua abaixo dele, porque (I_{xc} / y_c A > 0).**

- **Momentos de inércia de algumas superfícies**

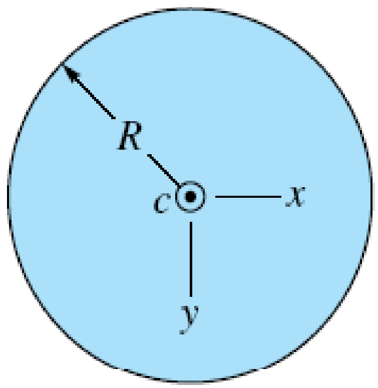


$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$

$I_{xyc} = 0$

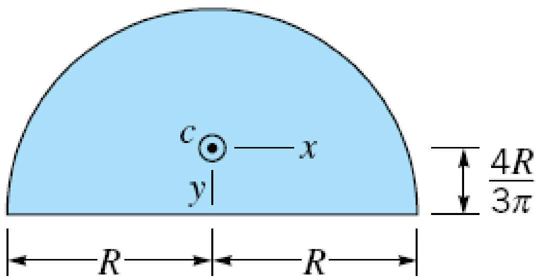


$A = \pi R^2$

$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$

$I_{xyc} = 0$

▶ Momentos de inércia de algumas superfícies (continuação)

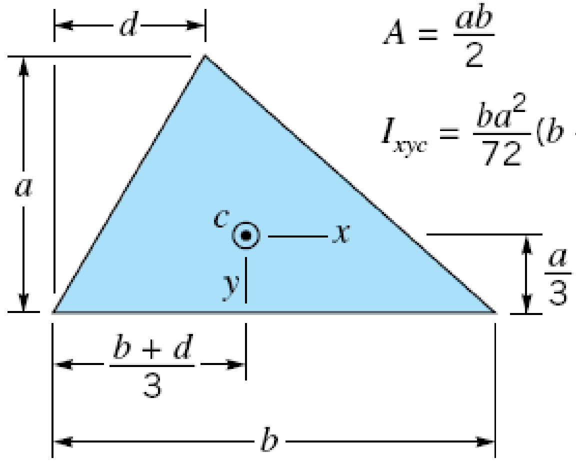


$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xc} = 0.1098R^4$$

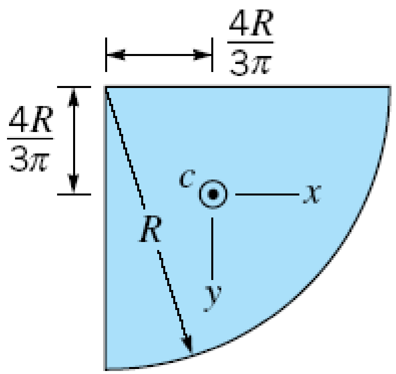
$$I_{yc} = 0.3927R^4$$

$$I_{xyc} = 0$$



$$A = \frac{ab}{2} \qquad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$$

$$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$$



$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$$

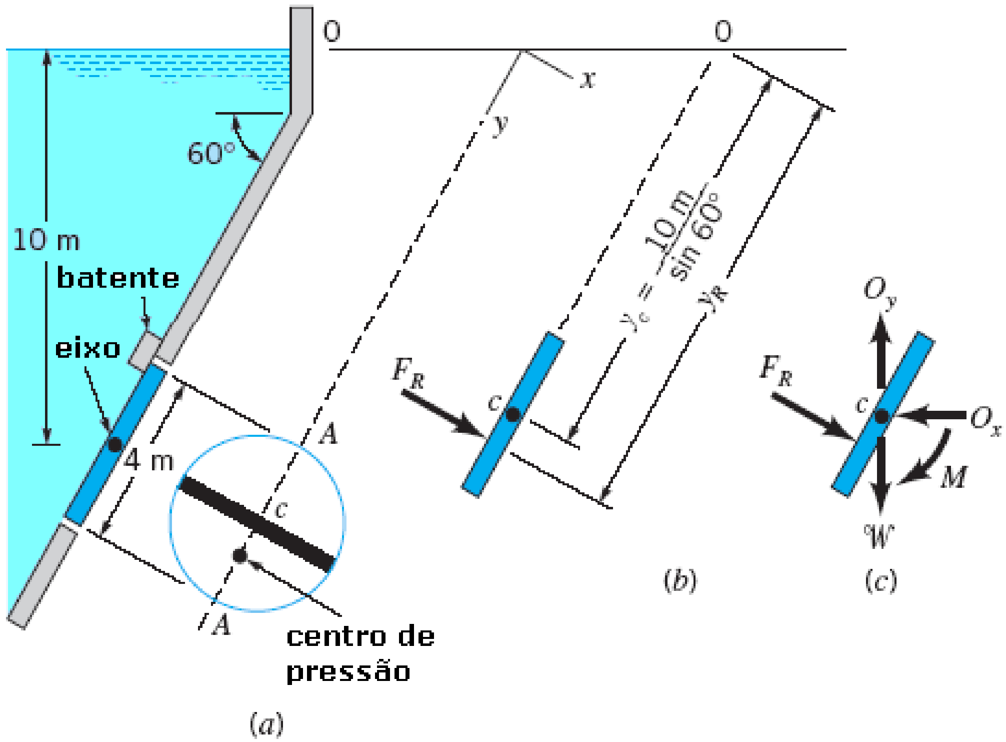
$$I_{xyc} = -0.01647R^4$$

Exercício

A figura abaixo mostra o esboço de uma comporta circular inclinada que está localizada num grande reservatório de água (γ=9,80 kN/m³). A comporta está montada num eixo que corre ao longo do diâmetro horizontal da comporta. Se o eixo está localizado a 10 m da superfície livre, determine:

a) o módulo e o ponto de aplicação da força resultante na comporta.

b) o momento que deve ser aplicado no eixo para abrir a comporta.



Solução

$a)$ *Módulo e ponto de aplicação da força*

$$F_R = \gamma\, h_C\, A$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(\text{peso específico da água}) = 9.810\, N/m^3 \\ h_C = 10\, m \\ A = \pi r^2 = \pi\,(2)^2 = 4\pi \end{array}\right\} \Rightarrow F_R = 1{,}23\times 10^6\ N$$

Ponto de aplicação (x_R, y_R)

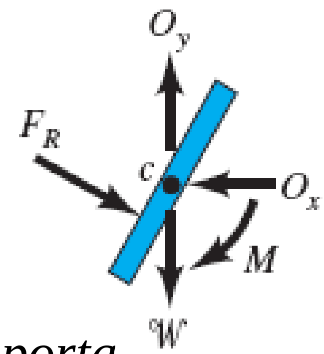
$$\left.\begin{array}{l} x_R = \dfrac{I_{xyc}}{y_C A} + x_C \\ x_C = 0\ (\text{figura}) \\ I_{xyc} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_R = 0;$$

$$\left.\begin{aligned}
&y_R = \frac{I_{xc}}{y_C A} + y_C \\
&h_C = y_C \operatorname{sen}\theta \\
&y_C = \frac{10}{\operatorname{sen}(60^o)} = 11{,}55\, m(\,figura) \\
&I_{xyc} = I_{yc} = \frac{\pi\, r^4}{4} = 4\pi
\end{aligned}\right\} \Rightarrow y_R = \frac{4\pi}{11{,}55 \times 4\pi} + 11{,}55 = 11{,}64\, m$$

$$Então,\ \ F_R = 1{,}23 \times 10^6\, N, \quad x_R = 0 \quad e \quad y_R = 11{,}64\ m$$

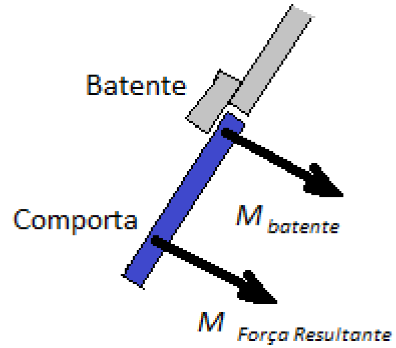
b) Momento

De acordo com a figura (do slide 48), a distância entre o eixo da comporta e o centro de pressão (ao longo da comporta) é,



$$d = y_R - y_C = 0{,}09$$

Considerando o diagrama de corpo livre (ao lado), quando a comporta está em repouso, temos



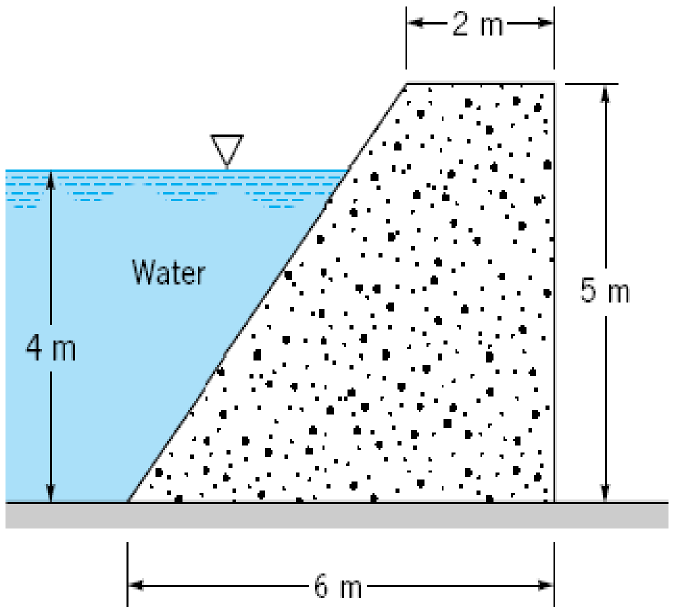
$$\sum M_C = M_{ForçaResultante} - M_{batente} = 0,$$

$$M_{ForçaResultante} = F_R d = (1{,}23 \times 10^6\ N) \times (0{,}09\, m) = 1{,}07 \times 10^5\ Nm$$

Universidade Federal do ABC

Exercício

A barragem mostrada na figura abaixo é construída em concreto (γ = 23,6 kN/m³) e está simplesmente apoiada numa fundação rígida. Determine o coeficiente de atrito estático entre a barragem e a fundação, para que a barragem não escorregue. Admita que a água não provoca qualquer efeito na superfície inferior da barragem (infiltrações, por exemplo).



Solução

$$F_R = \gamma\, h_C\, A$$

$$\gamma\,(água) = 9810\, N/m^3$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = 51{,}34^o$$

$$h_C = \frac{\dfrac{profundidade\ total}{2}}{\cos(90-\theta)} = \frac{\dfrac{4}{2}}{\cos(38{,}66^o)} = 2{,}56\, m$$

$$A = largura\ da\ barragem \times 4 = 4\ell.$$

$$Logo,\ F_R = 9.810 \times 2{,}56 \times 4\ell = 100454{,}4\ell\ (N)$$

$$Na\ direção\ horizontal,\ temos$$

$$F_{R-H} = F_R \cos(38{,}66^o) = 78441{,}5\,\ell\ (N)$$

$$Na\ direção\ vertical,\ F_{R-V} = F_R\, \mathrm{sen}(38{,}66^o) = 62690\,\ell\ (N)$$

Para que a barragem não se movimente, $F_{R-H} = F_{Atrito} = \mu N$

N é a força normal. Precisamos calculá-la. Neste caso, ela corresponde ao módulo da força peso da barragem.

$$N = m_{barragem} \times g. \left(m_{barragem} \text{ é a massa da barragem}\right)$$

$$m_{barragem} = \rho_{barragem} \times V_{barragem}, \text{ onde } \rho_{barragem} = \frac{\gamma_{barragem}}{g} = \frac{23{,}6 \times 10^3}{g}$$

$V_{barragem}$ é o volume da barragem, dado por

$$V_{barragem} = \frac{(6+2)5}{2} \times \ell = 20\,\ell \ (m^3)$$

$Assim,$

$$N = m_{barragem} \times g + F_{R-V} = \frac{23{,}6 \times 10^3}{g} \times 20\ell \times g + 62{,}69 \times 10^3\ \ell = 534{,}69 \times 10^3\ \ell$$

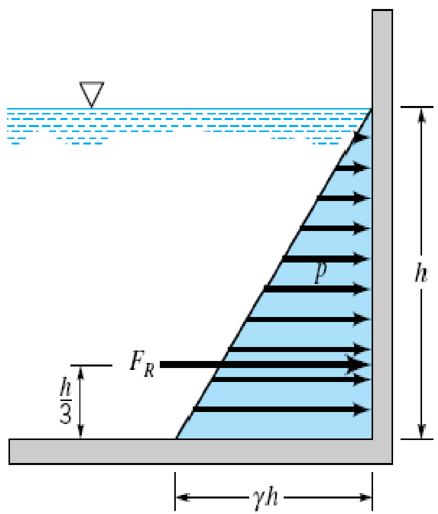
$Voltando\ \grave{a}\ igualdade\ F_{R-H} = F_{Atrito},\ temos:$

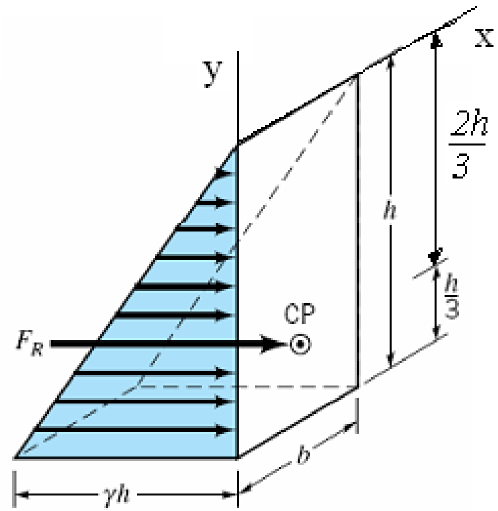
$$784411{,}5\ \ell = \mu \times 534{,}69 \times 10^3\ \ell$$

$$\mu = \frac{78411{,}5}{534{,}69 \times 10^3} = 0{,}147$$

2.6 Prismas de pressão

► **Considere a distribuição de pressão ao longo da parede vertical de um tanque de largura *b* e que contém um líquido de peso específico γ.**

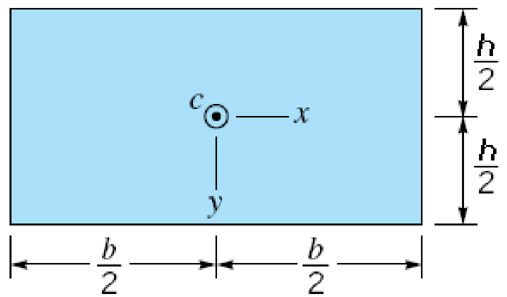




► **A pressão varia linearmente com a profundidade $p = \gamma h$. É nula na superfície do líquido e igual a γh no fundo do reservatório.**

► Cálculo do centro de pressão (x_R, y_R).

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_C A} + x_C \quad e \quad y_R = \frac{I_{xc}}{y_C A} + y_C$$



$A = ba$

$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$

$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$

$I_{xyc} = 0$

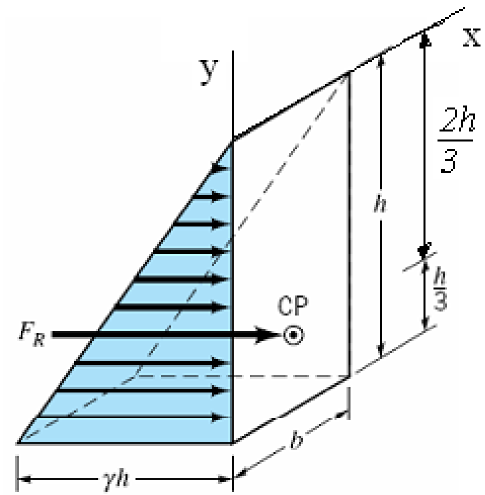
$$I_{xyc} = 0,\ e,\ por\ simetria,\ x_R = x_C = \frac{b}{2}$$

$E,$

$$y_R = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\left(-\frac{h}{2}\right) b h} - \frac{h}{2} = -\frac{2h}{3} \Rightarrow (x_R, y_R) = \left(\frac{b}{2}, -\frac{2h}{3}\right)$$

► **Isto significa que o centro de pressão está a uma altura de h/3 do fundo do reservatório (ou do leito da represa).**

► **A figura a seguir mostra o chamado de prisma de pressão.**



► **A força resultante que atua na superfície vertical é, mumericamente, igual ao volume desse prisma,**

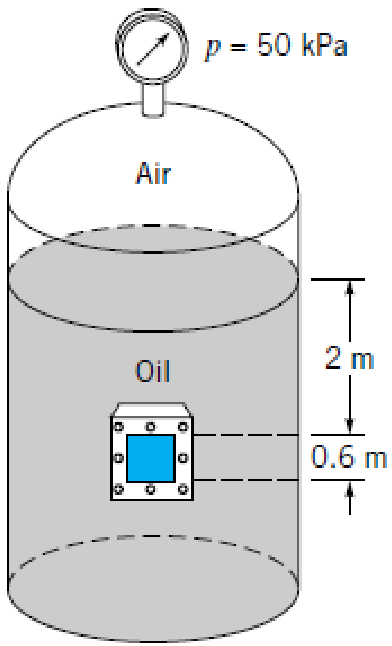
$$F_R = (\text{pressão média sobre a área retangular}) \times \text{área}$$

$$F_R = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)A$$

$$F_R \overset{N}{=} Volume = \frac{1}{2}(\gamma\, h)(b\, h) = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)A$$

Exercício

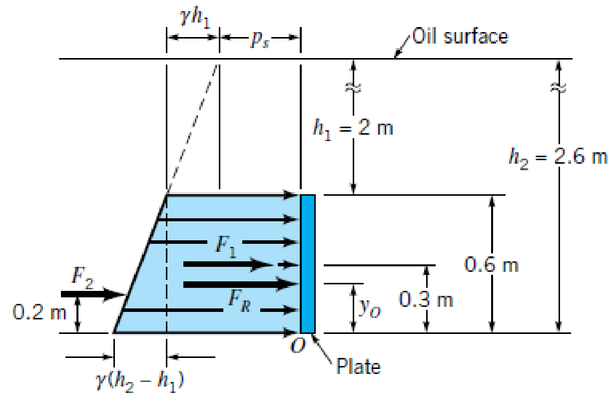
A figura abaixo mostra o esboço de um tanque pressurizado que contém óleo (SG = 0,9). A placa de inspeção instalada no tanque é quadrada e apresenta largura igual a 0,6 m. Qual o módulo, e a localização da linha de ação, da força resultante que atua na placa quando a pressão relativa no topo do tanque é igual a 50 kPa. Admita que o tanque está exposta à atmosfera.



Solução

A figura ao lado mostra que a pressão na superfície da placa é dada pela soma da pressão do ar comprimido na superfície do óleo e à pressão devida ao próprio óleo.

A força resultante sobre a placa, então, será:



$$F = F_1 + F_2 = (p_{superfície} + \gamma_1 h_1)A + \gamma\left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)A$$

Separadamente,

1) *Força devido à pressão do ar comprimido e a porção de óleo sobre a placa*

$$F_1 = (p_{superfície} + \gamma_1 h_1)A = 50\times 10^3 + 0{,}9\times 10^3 \times 9{,}81\times 0{,}36 = 24{,}4\times 10^3\ N$$

2) *Força devido à pressão do óleo em contato com a placa*

$$F_2 = \gamma\left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)A = (0{,}9\times10^3\times9{,}81)\times(0{,}3)\times(0{,}6)^2 = 0{,}95\times10^3\ N$$

$$\left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right) = \left(\frac{2{,}6-2{,}0}{2}\right) = 0{,}3\,m$$

$$Assim,\ F_R = F_1 + F_2 = 24{,}4\times10^3\ N + 0{,}95\times10^3\ N = 25{,}4\times10^3\ N$$

Em relação ao eixo vertical e ao ponto A, temos,

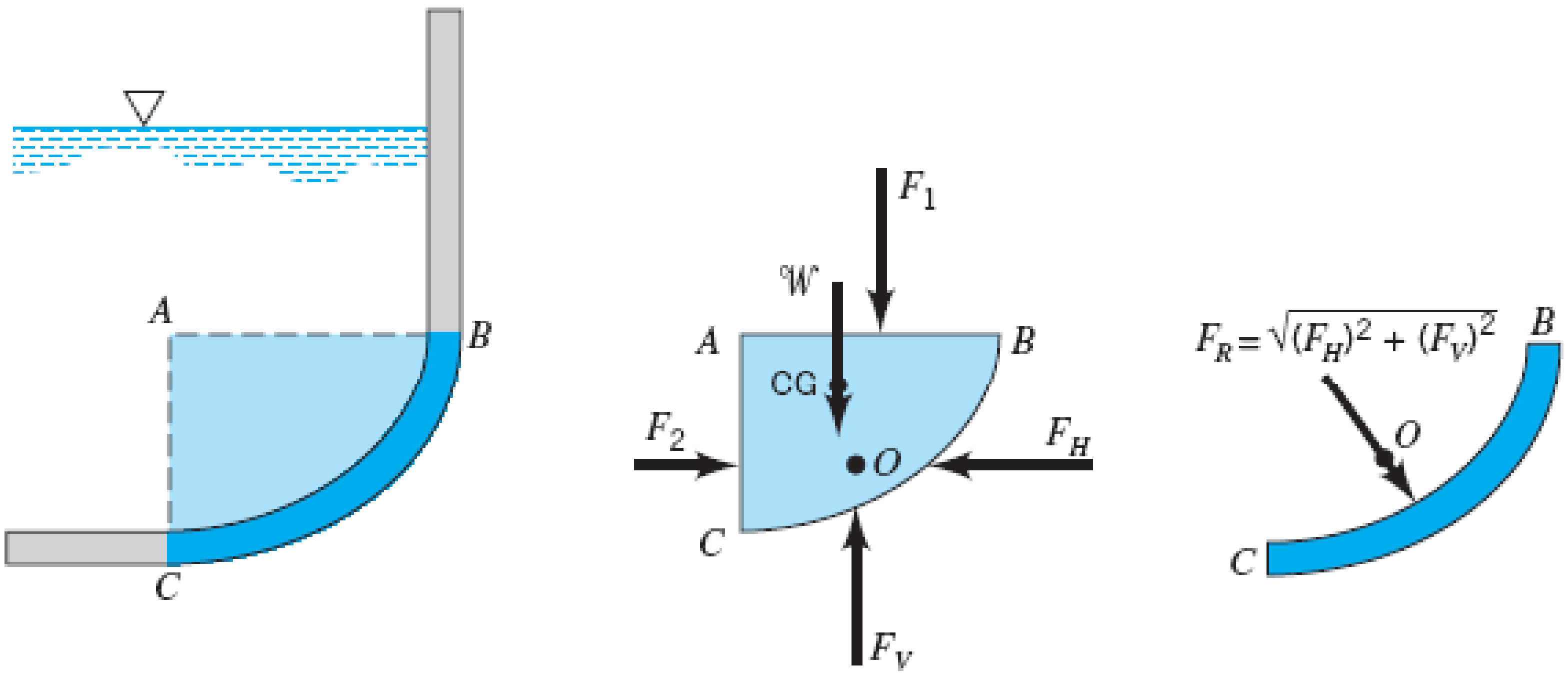
$$F_R y_O = F_1(0{,}3) + F_2(0{,}2)$$

$$Logo,\ y_O = \frac{24{,}4\times10^3(0{,}3) + 0{,}95\times10^3(0{,}2)}{25{,}4\times10^3} = 0{,}296\,m\ (acima\ da\ borda\ inferior)$$

Universidade Federal do ABC

2.7 Forças hidrostáticas em superfícies curvas

► **Consideremos a seção curva BC do tanque aberto.**



Universidade Federal do ABC

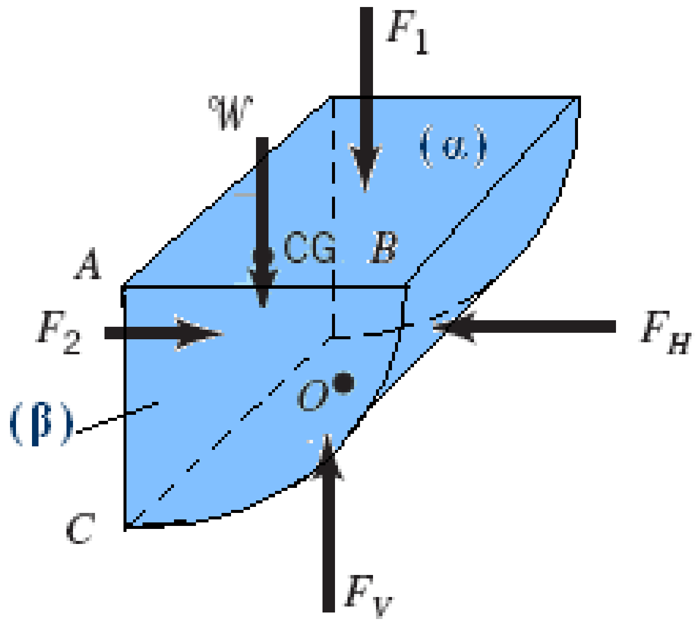
- F_1 = **Força feita pelo líquido sobre a superfície imaginária (α);**

- F_2 = **Força feita pelo líquido sobre a superfície imaginária (β);**

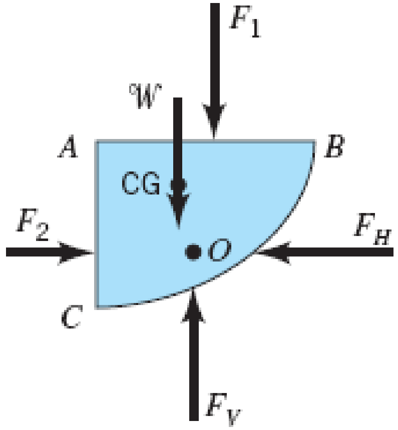
- **W = Peso da massa do fluido considerado (age no CG);**

- F_H **é a componente horizontal da força feita pelo tanque sobre o líquido. É colinear a** F_2**;**

- F_V **é a componente vertical da força feita pelo tanque sobre o líquido. É paralela a W e** F_1**;**



- As linhas de ação F_V, F_H e F_2 passam pelo ponto O.



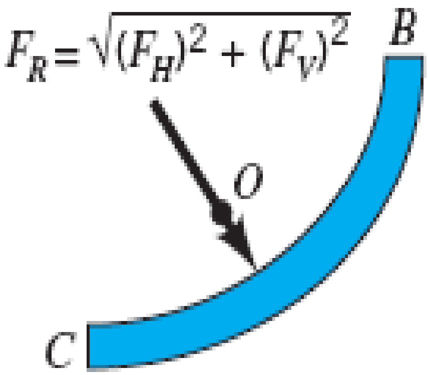
- **Condição de equilíbrio:**

$$F_H = F_2 = \gamma\, h_C A = \gamma \frac{h}{2} A$$

$$F_V = F_1 + W$$

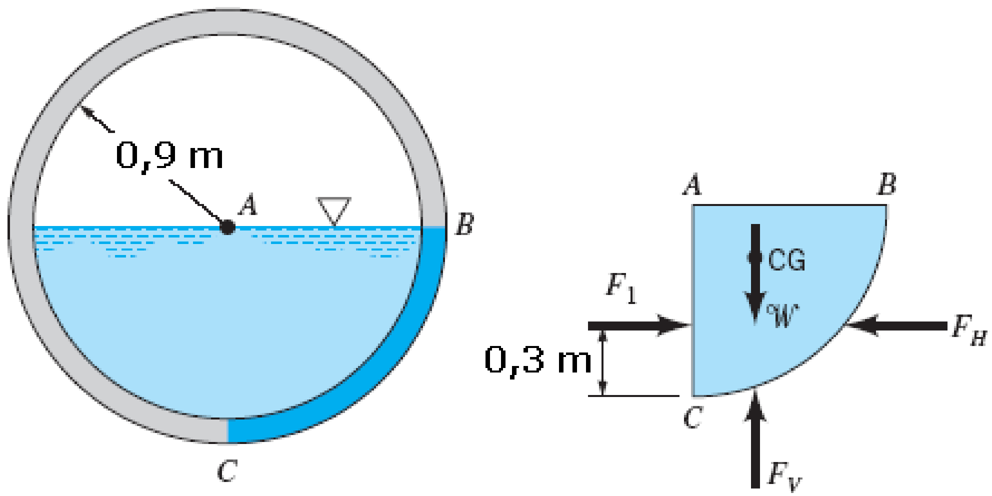
e

$$F_R = \sqrt{F_V^2 + F_H^2}$$



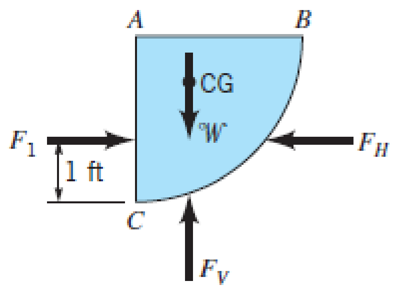
Exercício

A Figura abaixo mostra o esboço de um conduto utilizado na drenagem de um tanque que está parcialmente cheio de água. Sabendo que a distância entre os pontos A e B é igual ao raio do conduto, determine o módulo, a direção e o sentido da força que atua sobre a curva BC, devida à presença da água. Admita que a seção tenha comprimento de 1m.



Solução

a) A figura ao lado mostra o diagrama do corpo livre da porção de água considerada.



$$Condição\ de\ equilíbrio: F_H = F_1 \ \ e \ \ F_V = W$$

Cálculo de F_1 :

$$F_1 = \gamma h_C A = \gamma \frac{h}{2} A = 9810 \times \frac{0,9}{2} \times (1 \times 0,9) = 3973\, N$$

Cálculo de F_2 :

$$F_2 = mg = \rho V g = \gamma V = 9810 \times \left\{ \frac{1}{4} [\pi (0,9)^2 \times 1] \right\} = 6241\, N$$

$$\left(V = \frac{1}{4} volume\ do\ cilindro = \frac{1}{4} \times [\pi\, r^2 \times \ell] \right)$$

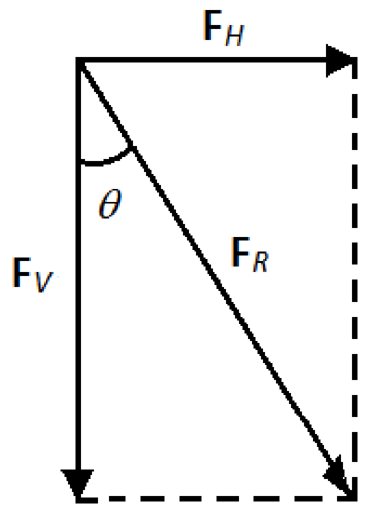
$$Aplicando\ a\ condição\ de\ equilíbrio:$$

$$F_H = F_1 = 3973\,N \quad e \quad F_V = W = 6241\,N$$

$$Logo: F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{(3973)^2 + (6241)^2} = 7398{,}3\,N$$

b) Encontramos a magnitude, agora falta a direção e o sentido da força. Consideremos a figura ao lado. O ângulo θ da a direção da força da água sobre a superfície curva, o sentido é o determinado pela soma: $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_H + \mathbf{F}_V$. *Da figura,*

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_H}{F_V}\right) = 32{,}5^o$$



2.8 Empuxo, Flutuação e Estabilidade

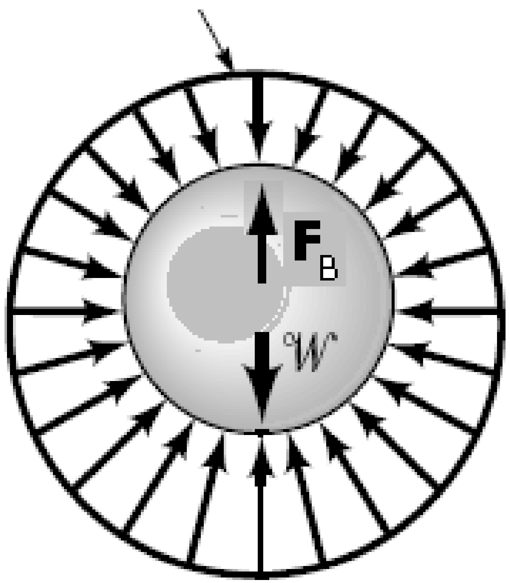
► **Empuxo**

"Todo corpo mergulhado num fluido em repouso sofre, por parte do fluido, uma força vertical para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo."
(Princípio de Arquimedes)

$$F_B = m\,g = \rho V g$$

$$F_B = \rho\, g\, V = \gamma\, V$$

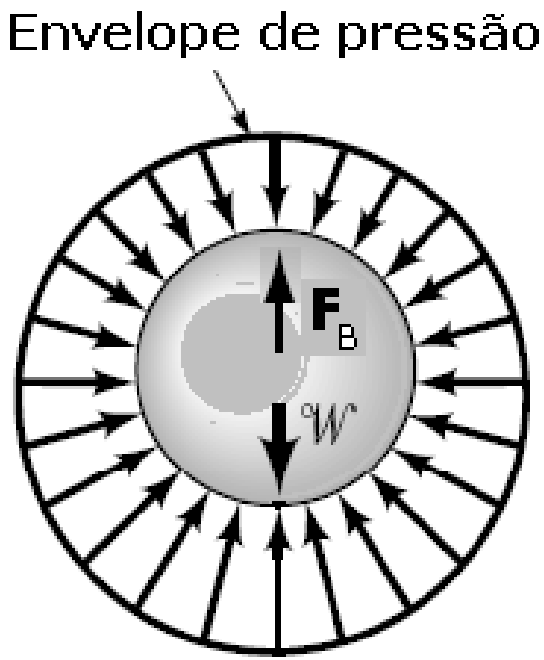
$$\mathbf{F}_B = \gamma\, V\, \mathbf{k}$$



► **Está força é chamada de EMPUXO e é o resultado do Gradiente de pressão, que aumenta com a profundidade.**

Universidade Federal do ABC

► **A linha de ação da força empuxo, F_B, passa pelo centróide do volume deslocado e o ponto de aplicação dessa força é chamado de centro de empuxo.**



► **O centro de empuxo corresponde ao centro de gravidade do massa de fluido deslocado.**

Exercício

A figura a seguir mostra o esboço de uma bóia com diâmetro e peso iguais a 1,5 m e 8,5 kN, respectivamente, e que está presa ao fundo do mar por um cabo. Normalmente, a bóia flutua na superfície do mar, mas em certas ocasiões, o nível do mar sobe e a bóia fica completamente submersa. Determine a força que tensiona o cabo na condição mostrada na figura.

($\gamma_{\text{água do mar}}$ = 10,1 kN/m³)

Solução

A partir do diagrama do corpo livre ao lado verifa – se que a condição de equilíbrio é :

$$F_B = W + T \Rightarrow T = F_B - T$$

Onde :

F_B *é a magnitude do empuxo,*

W *é a magnitude do peso da boia,*

T *é a tensão no cabo.*

F_B = *peso do volume de massa de água deslocado pela boia,*

$$F_B = \gamma_{água} V = 10{,}1 \times 10^3 \times \left[\frac{4}{3}\pi(0{,}75)^3\right] = 17848{,}2\ N$$

$W = 8{,}5 \times 10^3\ N$ *(dado no enunciado).*

Portanto, $T = 17848{,}2 - 8500 = 9348{,}2\ N$

► **Estabilidade**

● **Existem duas condições de equilíbrio:**

→ **estável;**

→ **instável.**

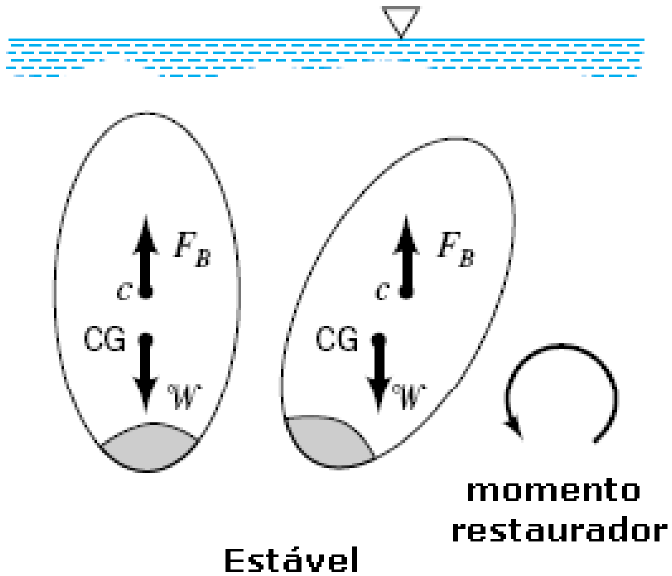
● **As situações de estabilidade e instabilidade dependem:**

→ **Localização do corpo no fluido: submerso ou flutuando.**

→ **Posição relativa entre os centro de gravidade, CG, e do centro de empuxo, c.**

► **Lembrando que o centro de empuxo corresponde ao centro de gravidade do massa de fluido deslocado.**

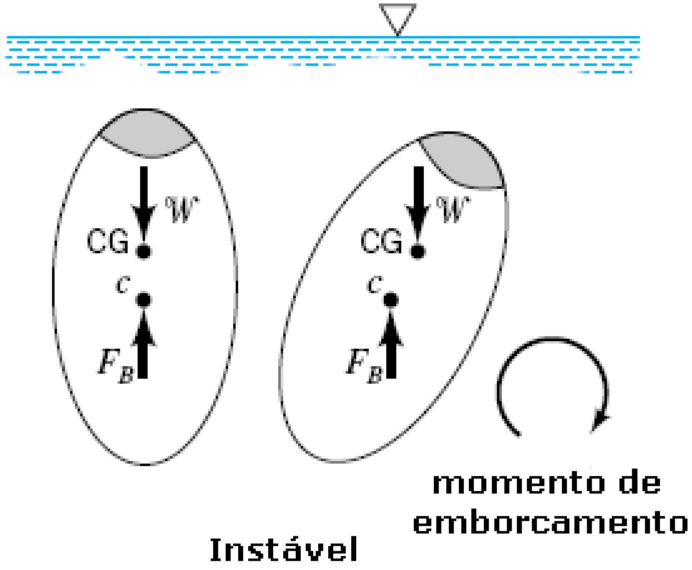
► **Corpo submerso com Centro de gravidade, CG, abaixo do centro de empuxo, c.**



► **Note: feita uma rotação a partir da posição de equilíbrio, o binário F_B e W criará um momento de restauração.**

► **Esta é uma situação de equilíbrio estável, pois a posição de equilíbrio original é restaurada.**

► **Corpo submerso com Centro de gravidade, CG, acima do centro de empuxo, c.**

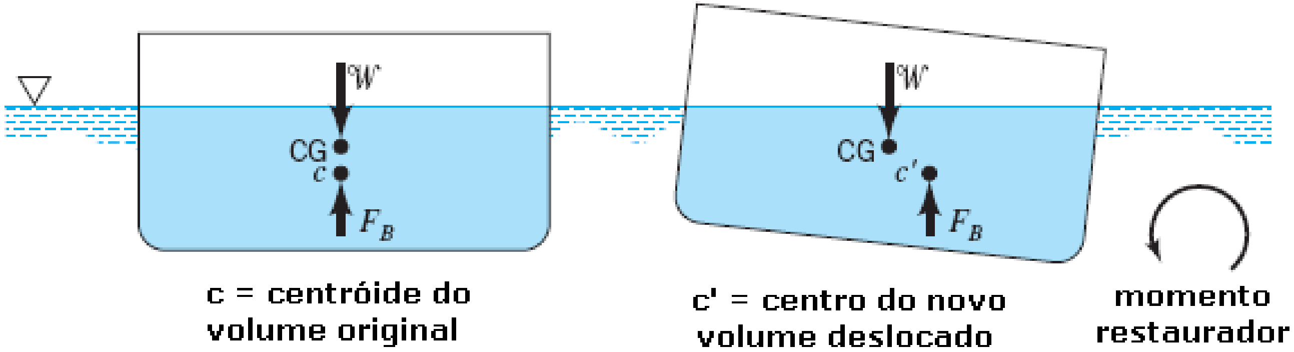


► **Note: feita uma rotação a partir da posição de equilíbrio, o binário F_B e W criará um momento de emborcamento.**

► **Esta é uma situação de equilíbrio instável, pois o corpo se moverá para outra posição de equilíbrio.**

Universidade Federal do ABC

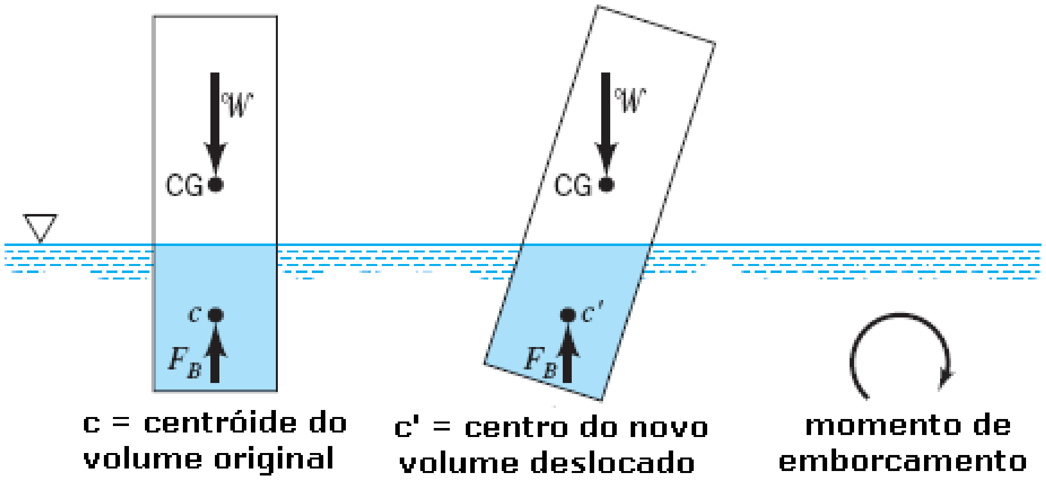
► **Corpo flutuando com Centro de gravidade, CG, acima do centro de empuxo, c, mas dentro do volume deslocado**



► **Note: feita uma rotação a partir da posição de equilíbrio, o binário F_B e W criará um momento restaurador.**

► **Esta é uma situação de equilíbrio estável, pois a posição de equilíbrio original é restaurada.**

► Corpo flutuando com Centro de gravidade, CG, acima do centro de empuxo, c, e acima do volume deslocado.



► **Note:** feita uma rotação a partir da posição de equilíbrio, o binário F_B e W criará um momento de emborcamento.

► **Esta é uma situação de equilíbrio instável, pois o corpo se moverá para outra posição de equilíbrio.**

2.8 Variação da pressão num fluido em movimento

► Estamos considerando fluidos em repouso ou em movimento nos quais as **tensões de cisalhamento sejam nulas.**

► Para um fluido em repouso ou MRU,

$$\nabla p = -\gamma\,\mathbf{k} \quad ou \quad -\nabla p - \gamma\,\mathbf{k} = 0$$

► Para um fluido em movimento, todas as moléculas se movimentam com a mesma velocidade, mesmo que esta varie com o tempo, isto é, com a mesma aceleração, caso exista. Este é um comportamento similar a de um corpo rígido. Logo,

$$-\nabla p - \gamma\,\mathbf{k} = \rho\,\mathbf{a}$$

► **De modo análogo, se um fluido estiver contido em um tanque que rotaciona em torno de um eixo fixo, então, este fluido rotacionará junto com o tanque como se fosse um corpo rígido – desde que não haja tensões de cisalhamento.**